

diesse

Didattica e Innovazione Scolastica
Centro per la formazione e l'aggiornamento



diesse
Le Botteghe
dell'Insegnare

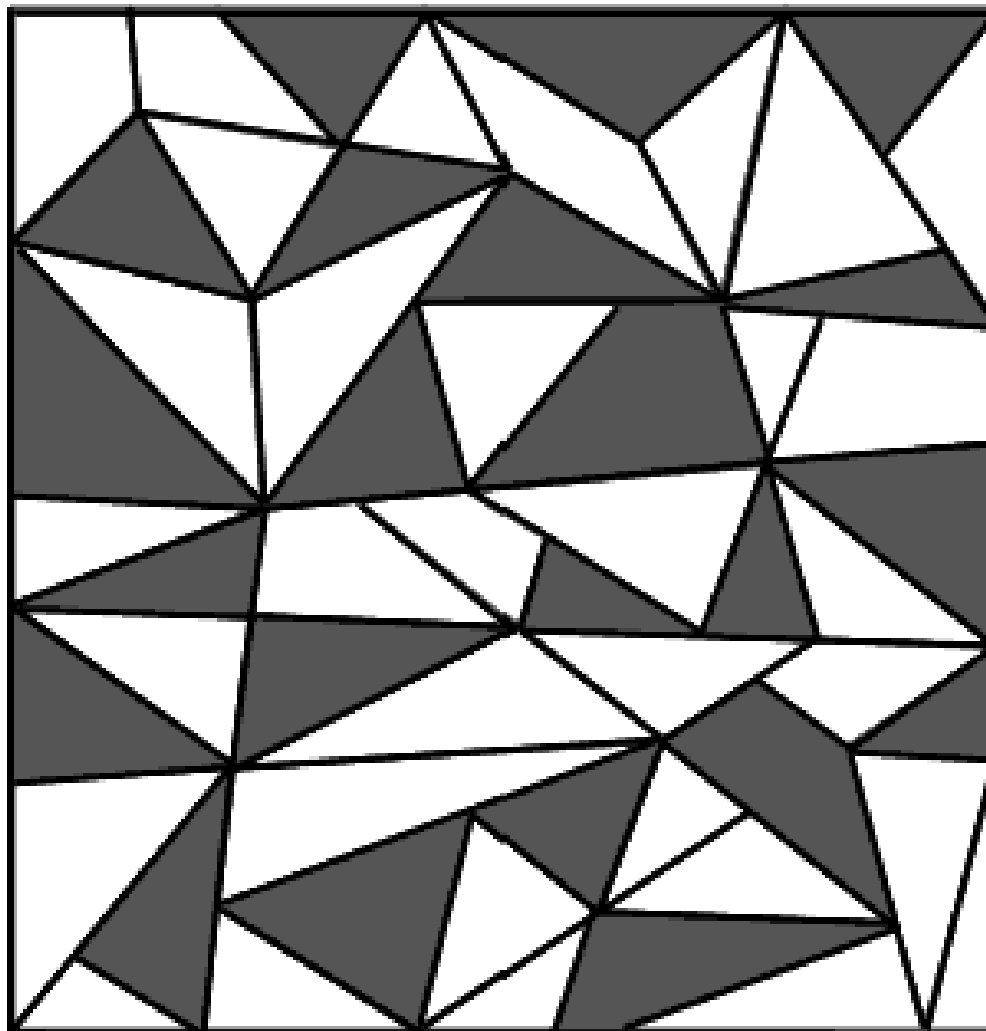
Diesse forma e innova: Le Botteghe dell'Insegnare

BOTTEGA DI MATEMATICA

Il ruolo del disegno in matematica

percorso 2016 - 2017

Cosa vedete?

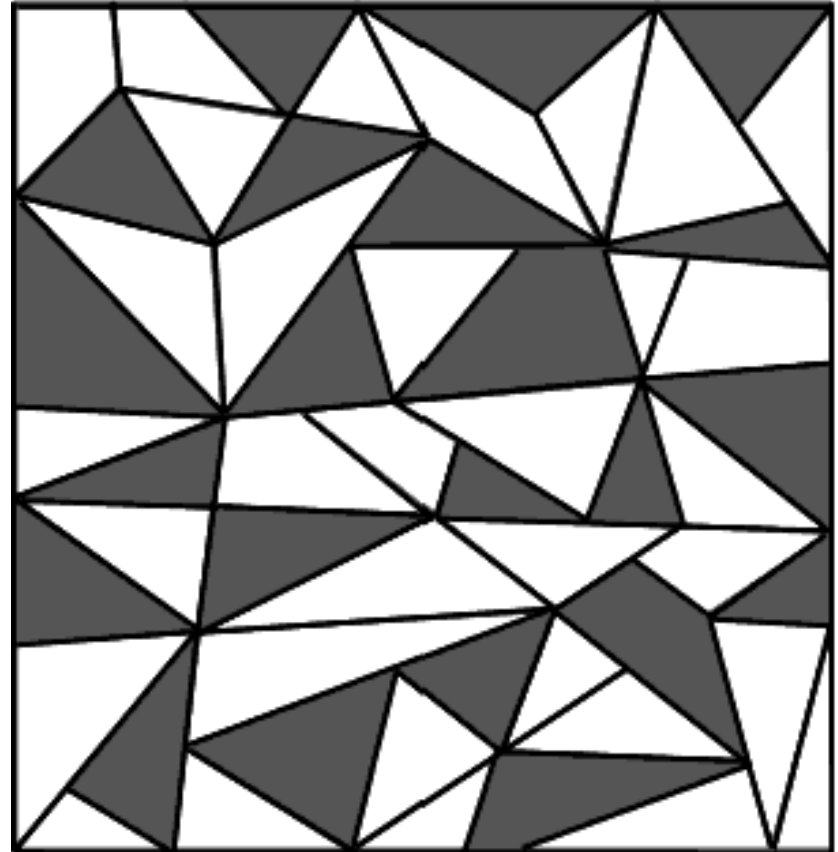


Lo scopo

Per capire cosa c'è dietro questa immagine occorre sapere cosa cercare. C'è bisogno di conoscere lo scopo. Lo scopo determina il punto di vista con cui si guarda qualcosa

Dovete cercare
una stella a cinque punte

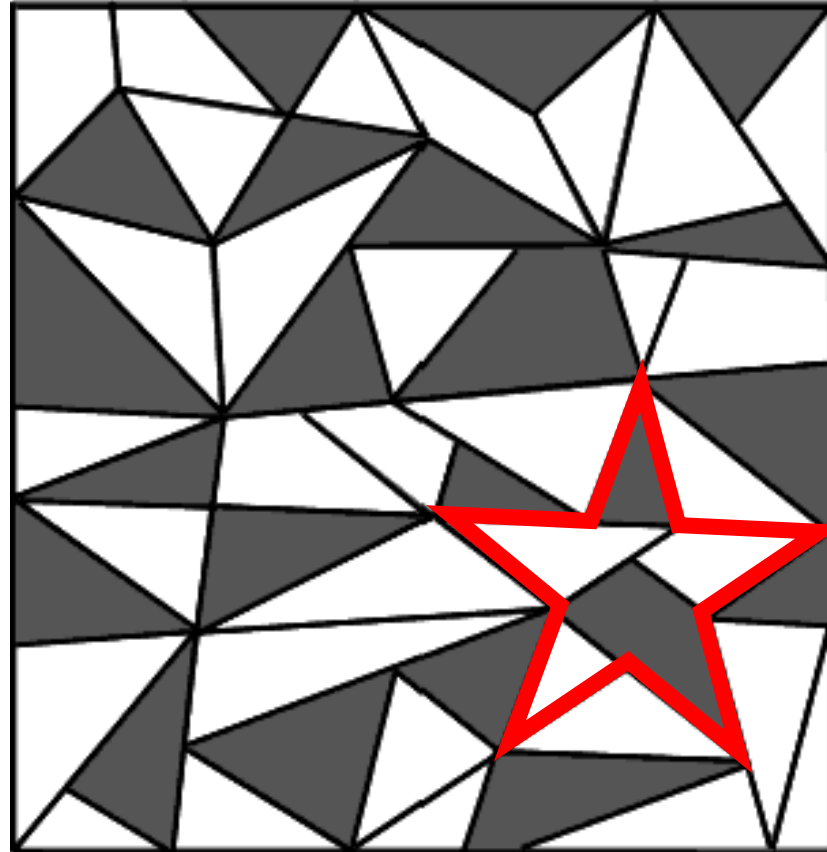
La vedete?



A volte anche sapendo lo scopo...

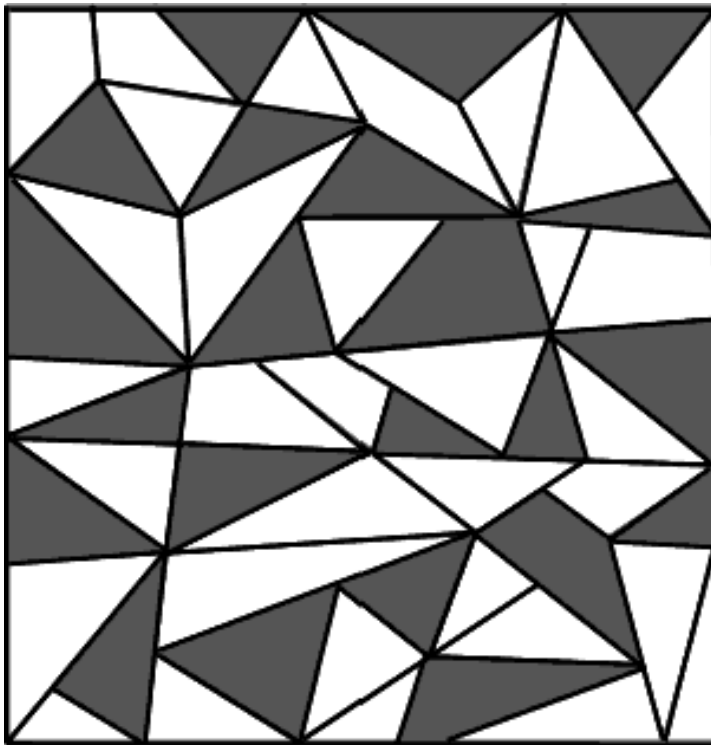
A volte anche sapendo cosa cercare noi non riusciamo a vedere... occorre un maestro, un amico che la prima volta ti insegni a vedere.

La stella a 5 punte



Ora che l'avete vista...

Cosa accade se ora vi ripropongo di vedere l'immagine?



Continuate a vederla vero?

L'importanza del vedere

Quando un oggetto lo si “vede” o con il pensiero o con gli occhi poi è più duraturo l'apprendimento.

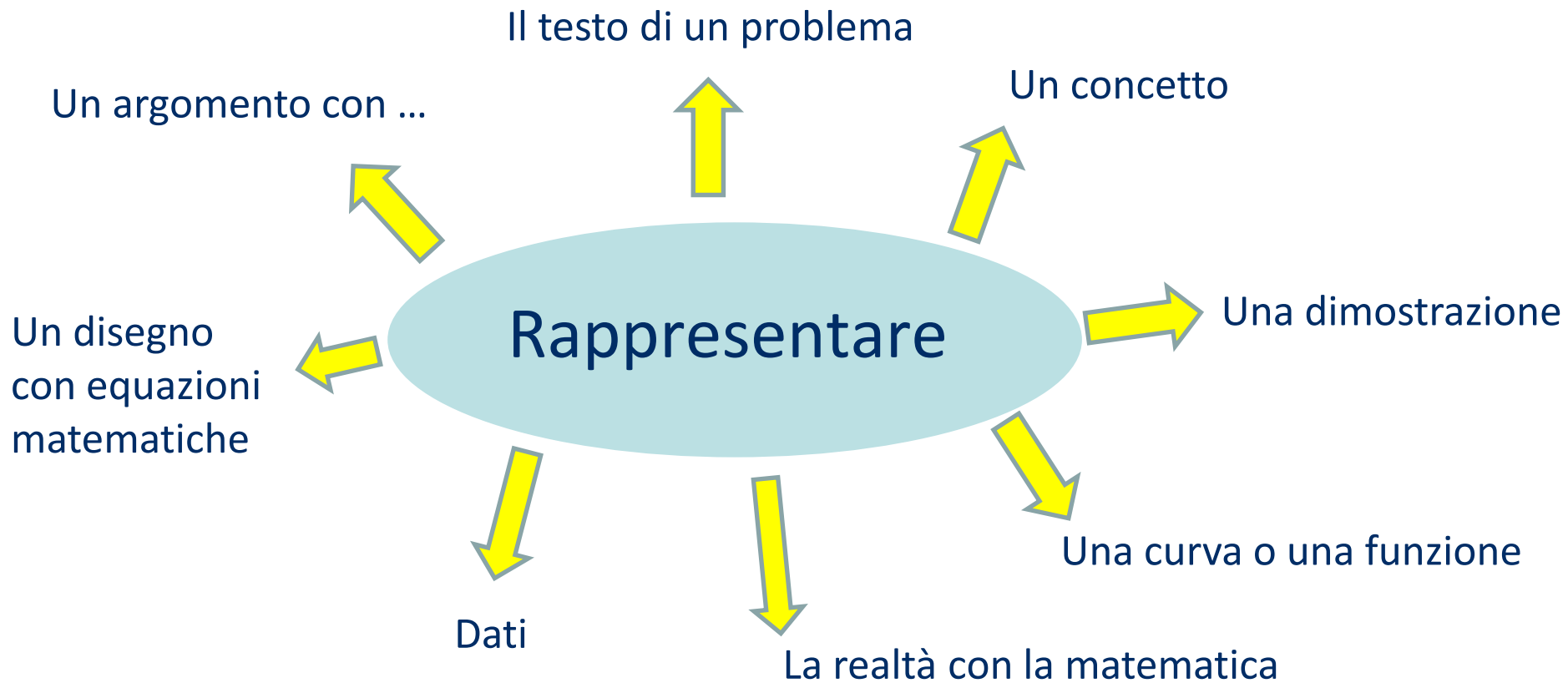
Da qui nasce l'idea del tema di quest'anno. Vogliamo *imparare e insegnare* a rappresentare per entrare sempre più dentro la conoscenza della matematica. Il problema quindi di questa bottega sarà “far vedere”.

Il lavoro di quest'anno

Le slide che presenterò non sono esaustive, sono uno spunto di lavoro. Ognuno potrà scegliere quale ambito vorrà approfondire quest'anno.

Cosa significa RAPPRESENTARE? Significa «presentare di nuovo» un concetto, un testo, un aspetto della realtà. Per rappresentare un problema occorre prima leggere il testo, riflettere sugli aspetti o i dati e giudicare quali sono rilevanti e solo dopo «ricostruire l'esperienza raccontata».

Per rappresentare bene un oggetto occorre aver compreso il senso dell'oggetto.



N.B. ho scritto il verbo «rappresentare» perché la matematica si impara in azione, l'io deve essere in azione.

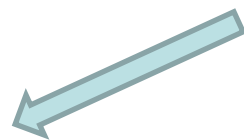
Nota bene

Prima di rappresentare un testo... la parola a Paolo Toni

I preziosi consigli di Paolo:

La figura deve essere:

- grande
- a matita
- **Verosimile** (cioè nel rispetto di misure e rapporti con l'uso del doppiodecimitro, compasso e goniometro)
- Arredata sui lati e sugli angoli
- A colori, in modo sobrio, e riservando il rosso per elementi di rilievo.

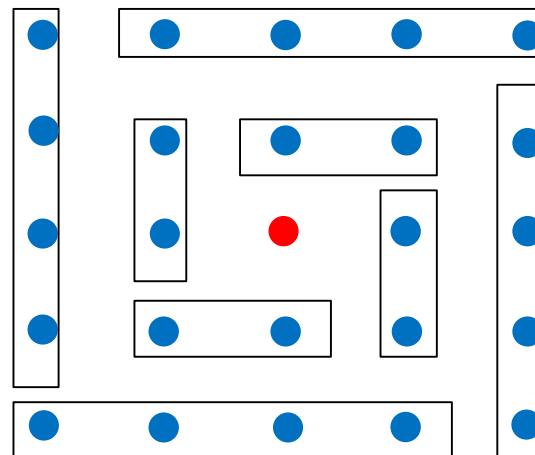


Perché la tesi possa essere toccata e vista

TEOREMA PITAGORICO (Paolo Toni)

Partiamo da un quadrato dispari, in particolare partiamo dal numero 25:

- ● ● ● ●
 - ● ● ● ●
 - ● ● ● ●
 - ● ● ● ●
 - ● ● ● ●
- Poi contiamo i punti all'interno della prima cornice e della seconda cornice, entrambi multipli di 4.



COSA VEDIAMO?

Il quadrato di 5 è uguale a

$$\begin{aligned} Q(5) &= 1 + 4 \times 2 + 4 \times 4 = 1 + 4 \times (2 + 4) \\ &= 1 + 8 \times (1 + 2) = 1 + 8T(2) \end{aligned}$$

Allo stesso modo si verifica che

$$Q(7) = 1 + 8T(3)$$

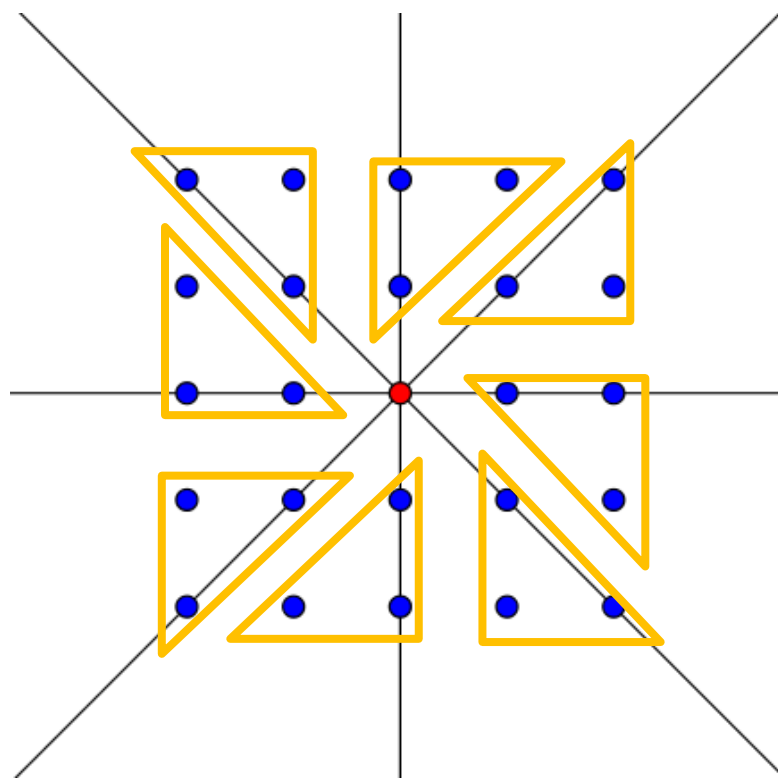
$$Q(9) = 1 + 8T(4)$$

Germoglia la visione/teorema $Q(2n + 1) = 1 + 8T(n)$

A parole: un quadrato di numero dispari è uguale a 1 più otto volte il triangolo del generatore del numero dispari. Dove per “generatore” del numero dispari $2n+1$ si intende il numero n .

Rappresentiamo il teorema

Il teorema appare visibile in forma geometrica:



In questo modo si vedono le 4 coppie di triangoli lungo gli assi di simmetria del quadrato. La figura conserva la proprietà all'aumentare del generatore. Questa conservazione della proprietà consente la generalizzazione del caso particolare visto, 25, al caso generale $(2n + 1)^2$

Il teorema dal punto di vista algebrico

$$Q(2n + 1) = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1 = \\ 8 \frac{1}{2} n(n + 1) + 1 = 8(1 + \dots + n) + 1 = 1 + 8T(n)$$

Quale dei due procedimenti, pitagorico e algebrico vi affascina di più, quale tocca di più le vostre corde del cuore?

I ragazzi del corso hanno risposto:

- 18 a favore del metodo pitagorico (comprese le uniche tre ragazze)
- 2 a favore del metodo algebrico

Quesito 1

Ogni numero dispari può far parte di una terna pitagorica?
(come cateto)

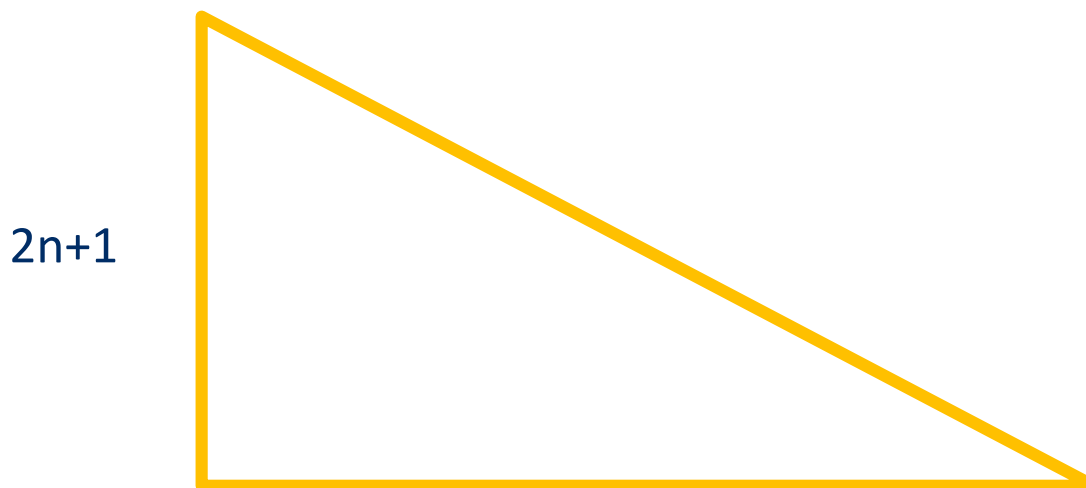


Come sarà fatta la terna pitagorica?

Ricordiamo alcune terne pitagoriche:

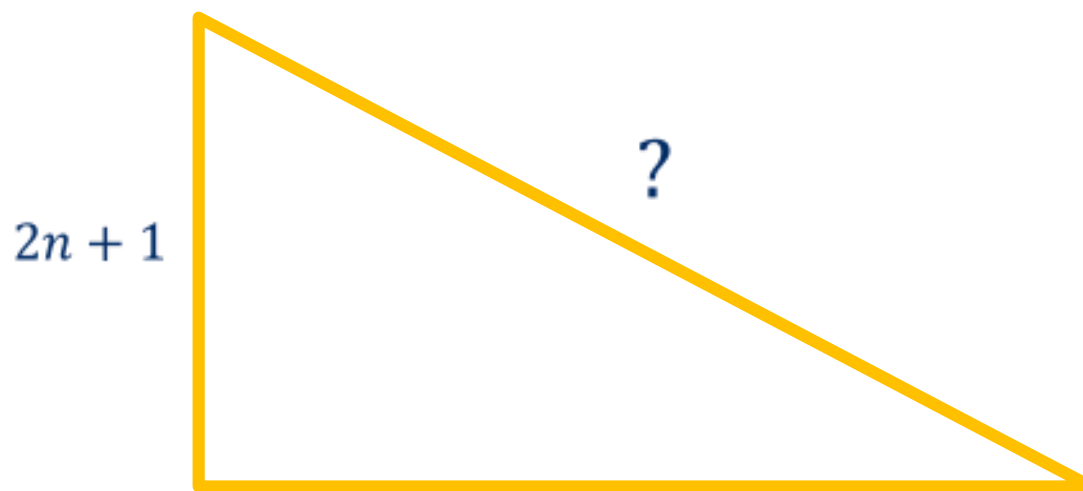
3-4-5 5-12-13 7-24-25

Rispetto al discorso fatto prima, 12 è il generatore di 25. Forse sull'altro cateto devo mettere il generatore di $(2n + 1)^2$. Vediamo chi è:



$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

Come sarà fatta la terna pitagorica?



$2n^2 + 2n$ Notiamo che il generatore di un quadrato dispari è sempre un numero pari

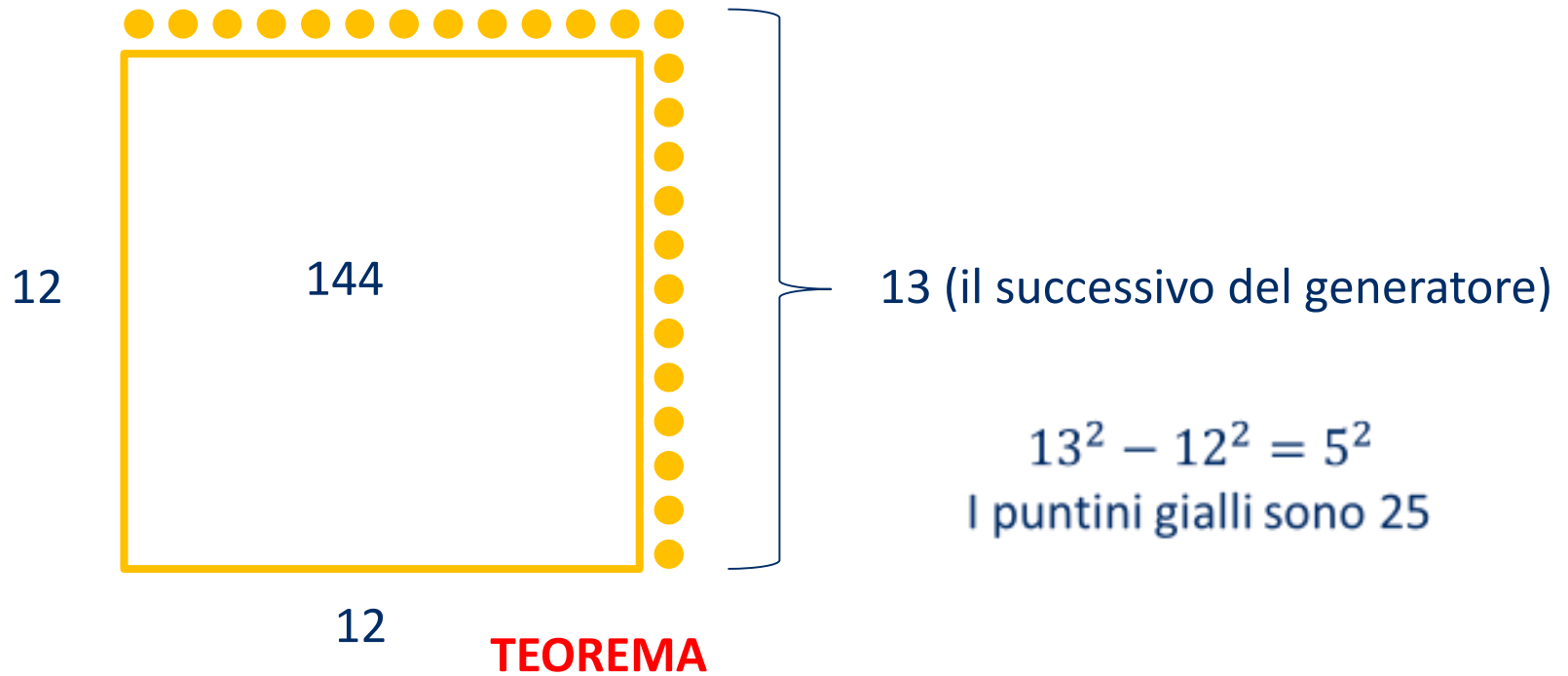
$$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4n^4 + 4n^2 + 8n^3 = 4n^4 + 4n^2 + 1 + 8n^3 + 4n^2 + 4n = (2n^2 + 2n + 1)^2$$



Ma chi se lo ricorda?

Rappresentiamo il problema

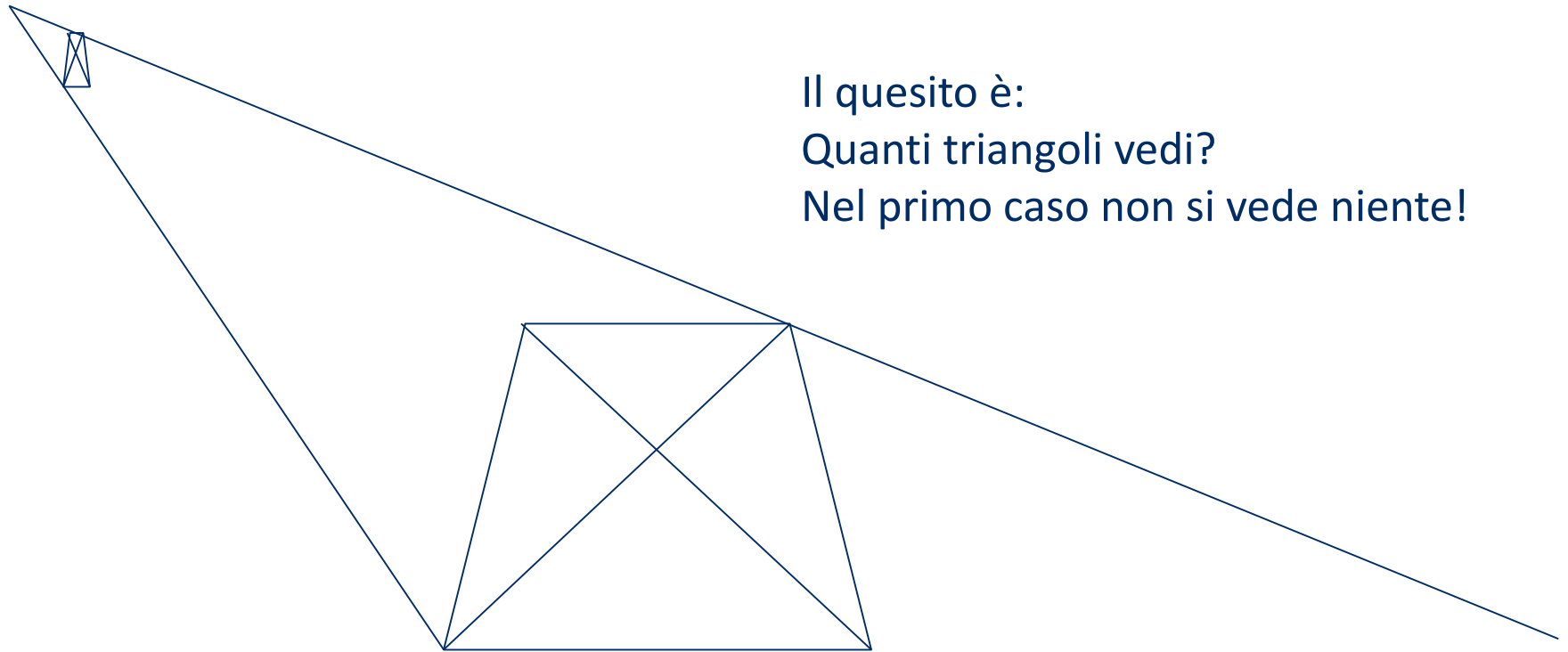
Il generatore di 25 è: $\frac{25 - 1}{2} = 12$



$$(\text{numero dispari})^2 + (\text{gen}(\text{numero dispari}))^2 = (\text{gen}(\text{numero sipari}) + 1)^2$$

La grandezza delle figure

Dove fermare il cursore?

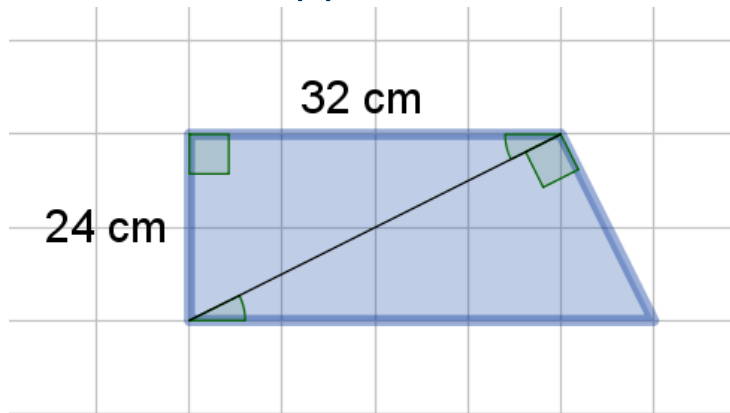


Il quesito è:
Quanti triangoli vedi?
Nel primo caso non si vede niente!

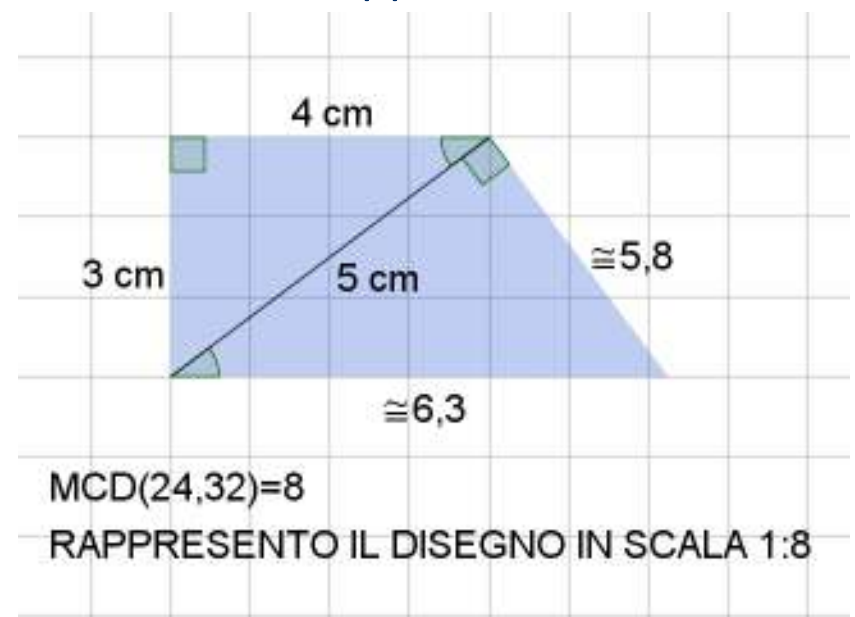
Problema 15 pag. 862 Dodero Baroncini

In un trapezio rettangolo ABCD la diagonale minore AC è perpendicolare al lato BC. Sapendo che la base minore CD è di 32 cm e l'altezza AD è di 24 cm, calcolare il perimetro del trapezio.

Prima rappresentazione



Seconda rappresentazione



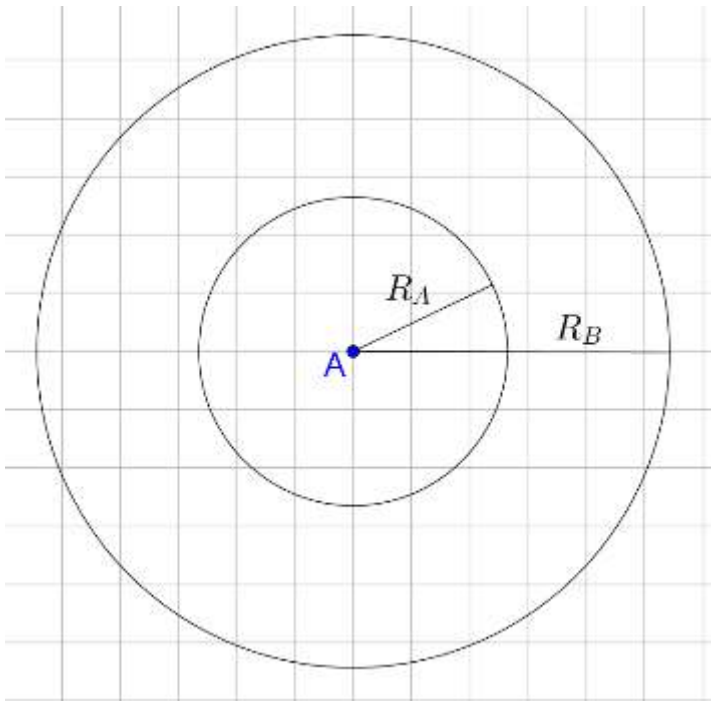
Vi sembra lo stesso problema?

Problema 1 di fisica

Due corpi si muovono su due circonferenze concentriche.

Sappiamo che $R_A/R_B=1,6...$

Disegno del ragazzo



Ma i numeri all'interno del testo non sono casuali.

$$\frac{R_A}{R_B} = 1,6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

Suggerimento:

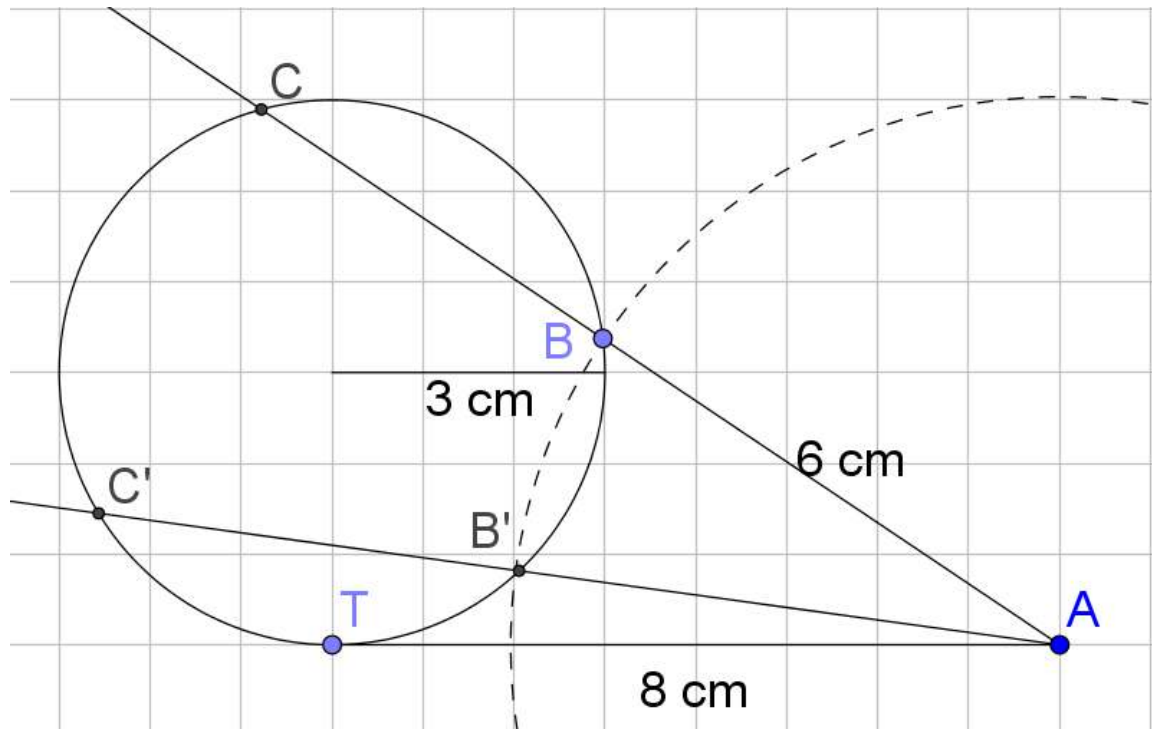
Scegliere $R_A = 8 \text{ cm}$ e $R_B = 5 \text{ cm}$

Oppure 4 cm e $2,5 \text{ cm}$.

DOBBIAMO RISPETTARE IL RAPPORTO!

Esercizio 2 pag 863

Si consideri una circonferenza di raggio 3 cm e da un punto A si conduca una tangente AT e una secante che interseca in B e in C la circonferenza ($AB < AC$). Sapendo che $AT = 8$ cm e $AB = 6$ cm, determinare la lunghezza della corda BC.



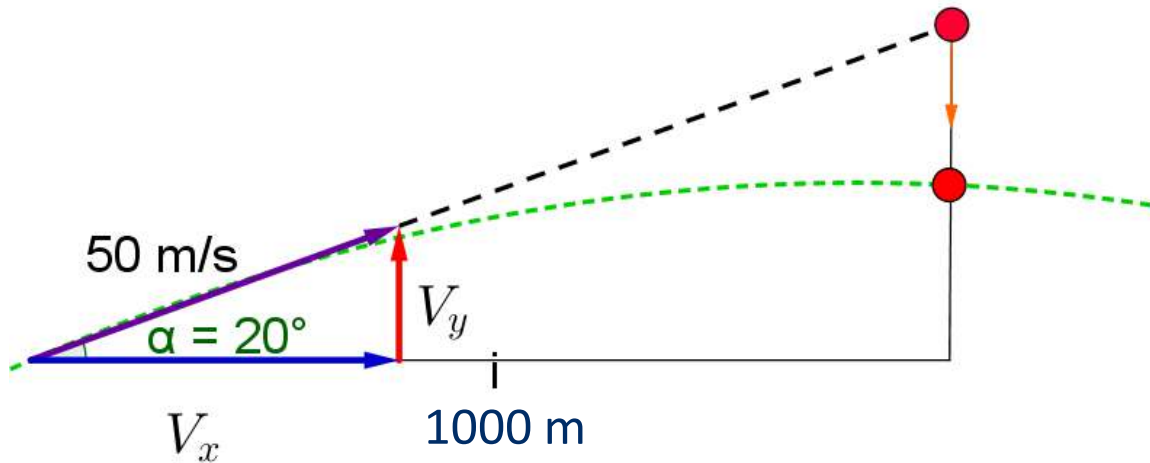
Per trovare B e C utilizziamo il compasso con apertura 6 cm. In questo modo capiremo che BC avrà due possibili posizioni. E sarà possibile in questo modo verificare il risultato misurando i segmenti BC e $B'C'$, che risultano approssimativamente \dots

Problema 2 di fisica

Un cannone spara un proiettile con una inclinazione rispetto al suolo di 20° , con una velocità di uscita di 50 m/s e nella direzione di un bersaglio situato a una distanza di 1000 m .

Nello stesso istante dello sparo il bersaglio cade liberamente.

A quale altezza il proiettile colpirà il bersaglio?



Errore dello studente:

Aveva scambiato $\sin(20^\circ)$ con $\cos(20^\circ)$, quindi V_y con V_x .

Se avesse disegnato il vettore velocità di 5 cm avrebbe stimato bene V_x e V_y e si sarebbe accorto **DA SOLO DELL'ERRORE.**

Riguardo ai problemi di fisica

Anche nei problemi di fisica in cui compaiono le forze, le tensioni, occorre “arredare” bene il disegno del problema stando attenti ai dati. Se la forza F_1 è il doppio di F_2 il suo vettore dovrà essere rappresentato come il doppio dell’altro.

Quindi rispettate sempre le proporzioni tra i dati e l’ordine tra le misure delle grandezze!

Proposta:

Dare una frazione di voto anche al disegno in proporzione della sua complessità e in funzione di:

- Grandezza
- Rispetto di misure e proporzioni
- Arredo sui lati e angoli
- Uso mirato del colore

Raccomandazione

Gli studenti non seguiranno queste indicazioni di precisione e bellezza se l'insegnante, per PRIMO, non curerà i disegni alla lavagna!

La rappresentazione del testo

Esempio 1 e 2

Il perimetro di un rettangolo è 22 cm e la base supera di 2 cm il doppio dell'altezza. Determina le misure della base e dell'altezza del rettangolo.

33 Scrivi l'equazione:

- della retta r_1 passante per $P(2, 1)$ e parallela alla retta di equazione $x - 3y = 0$;
- della retta r_2 passante per $Q(3, -1)$ e perpendicolare alla retta di equazione $3x + y + 1 = 0$.

Indicati con A e B , rispettivamente, i punti d'intersezione di r_1 con l'asse y e con l'asse x , e con C e D , rispettivamente, i punti di intersezione di r_2 con l'asse y e con l'asse x , calcola l'area del trapezio $ABCD$.

$$\left[\text{a. } r_1: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}; \text{ b. } r_2: y = \frac{1}{3}x - 2; \text{ Area} = \frac{49}{6} \right]$$

La rappresentazione del testo

Esempio 3:

Dato un parallelogramma ABCD, prolunga AB, dalla parte di B, di un segmento BE e CD, dalla parte di D, di un segmento DF, in modo che $BE=DF$.
Dimostra che AC ed EF si incontrano nel loro punto medio.

La rappresentazione del testo

Esempio 4:

Dato un parallelogramma ABCD, di centro O, chiama P, Q e R, rispettivamente, i punti medi di AB, OB e OC. Dimostra che PQRO è un parallelogramma.

Problema “Singapore”

PROBLEMA

Lauren ha speso il 20% dei suoi soldi comprando un vestito. Ha poi speso $\frac{2}{5}$ del rimanente in un libro. Le sono rimasti 72€. Quanti soldi aveva inizialmente?

Alternativa per risolvere il problema

x = euro iniziali

v = costo del vestito

y = costo del libro

$x = v + y + 72$

sapendo che $v = \frac{20}{100}x$

e $y = \frac{2}{5}(x - v)$

risulta $x = \frac{20}{100}x + \frac{8}{25}x + 72$

Allora $\frac{12}{25}x = 72$

da cui $x = 150$

Singapore Math Method

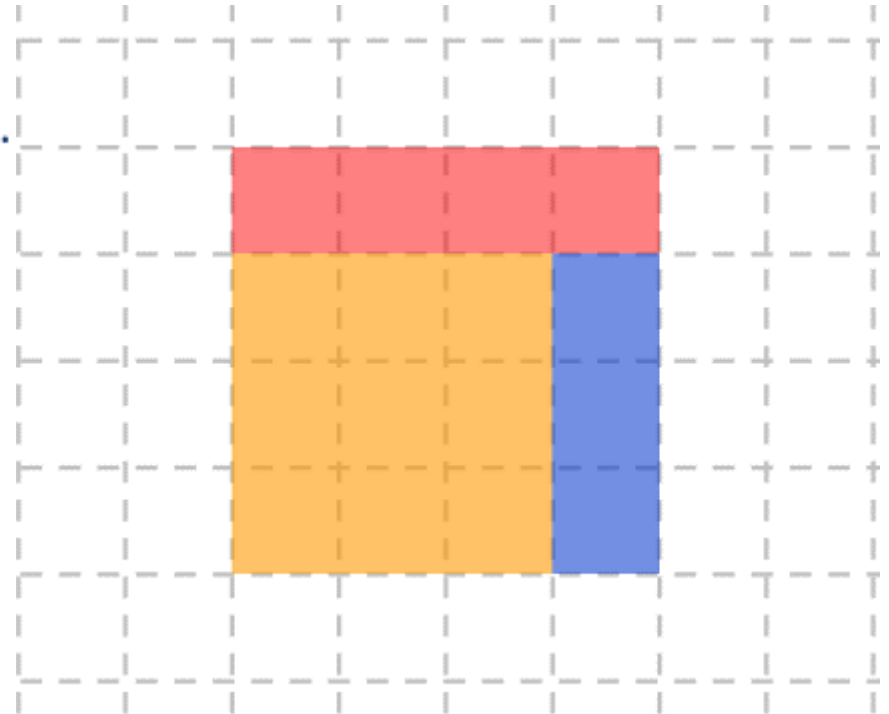


E se il testo ha già il suo grafico?

Occorre saper guardare... sapere cosa cercare. Altrimenti è come la stella a cinque punte

Problema

Il quadrato in figura ha l'area di 2304 cm^2 .
Quanto misura l'area delle tre parti che lo compongono?

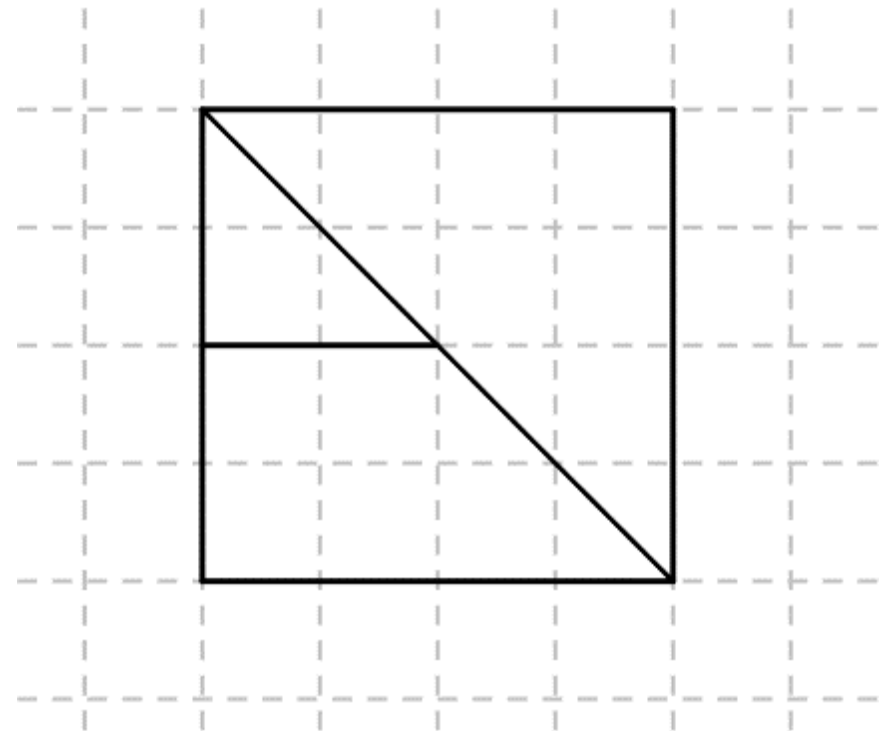


vincitore

Problema

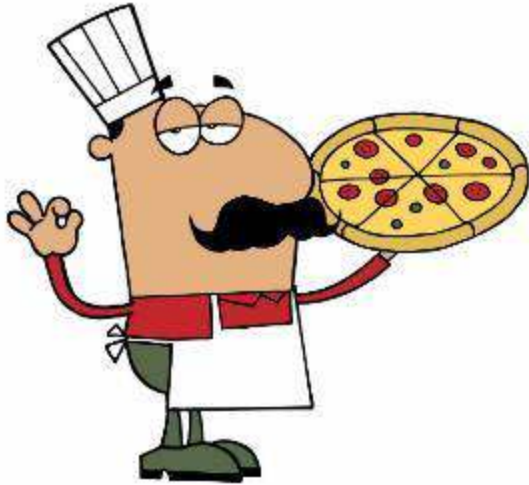
Il quadrato in figura ha l'area di 2704 cm^2 .

Quanto misura l'area delle tre parti che lo compongono?



vincitore

Il ritardo di Vincenzo



Alcuni ragazzi del 1° vanno a cena in pizzeria. Per non far impazzire il cameriere scelgono una pizza margherita ciascuno. Ognuno ha il suo modo di mangiare la pizza: c'è Francesca che la taglia in 4 parti uguali, Giovanna e Naomi che la tagliano in 8, Alyssa e Chiara che la tagliano in 7, Lorenzo, Roberto e Andrey che la tagliano in 5 parti. Ad un certo punto della serata arriva in ritardo Vincenzo. Ciascuno gli dà un pezzo della propria pizza perché ormai il pizzaiolo non le inforna più. Vincenzo esclama: «Arrivare tardi conviene!» Spiega il motivo di questa esclamazione.

Per comprendere il testo

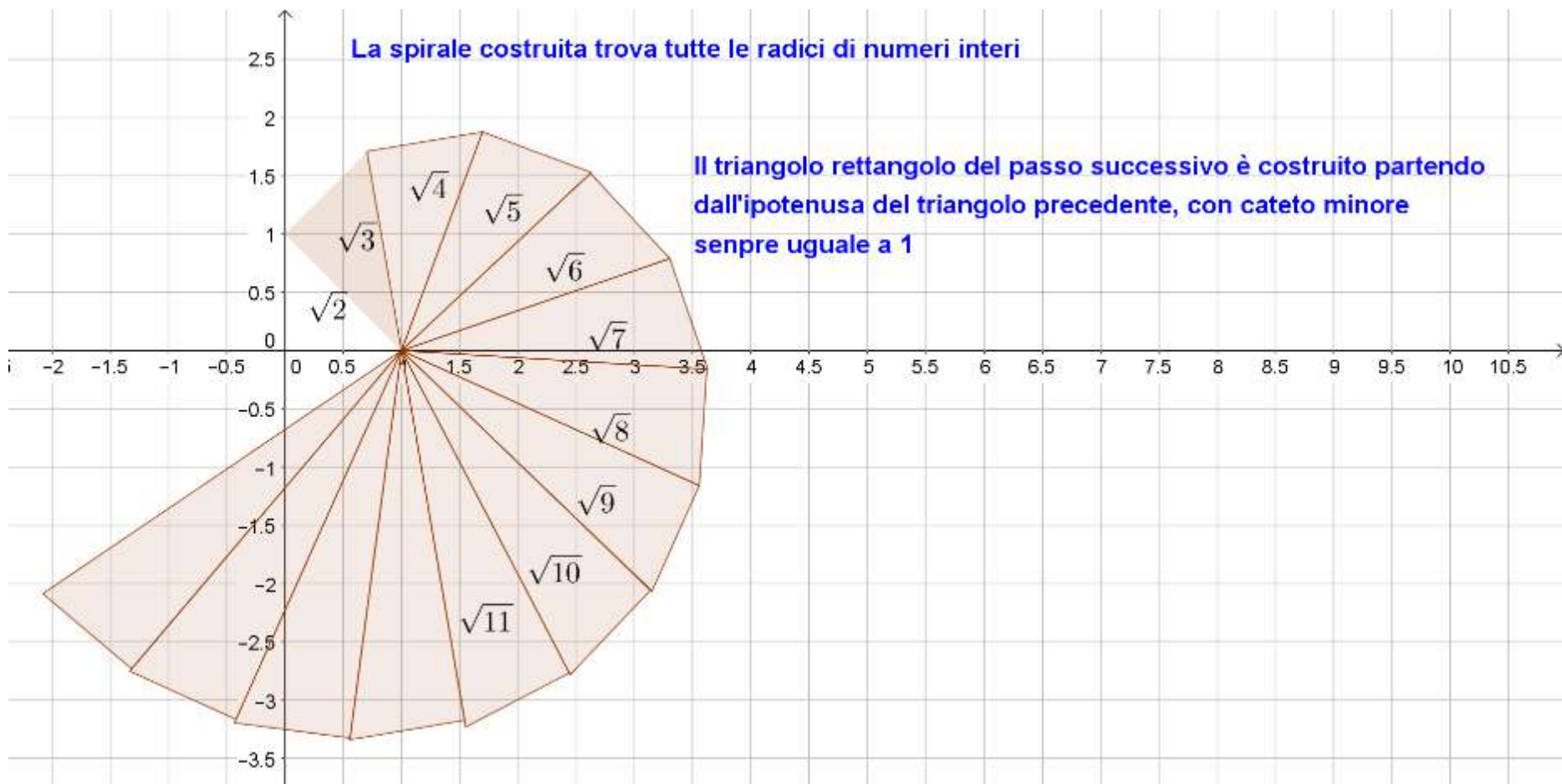
Occorre far attenzione

- ai termini ambigui
- Ai connettivi
- Conoscere il contesto (esempi: strada in montagna, ombra del bastone)

Rappresentare un concetto

Il concetto di limite con Geogebra

Rappresentare l'infinito dei radicali



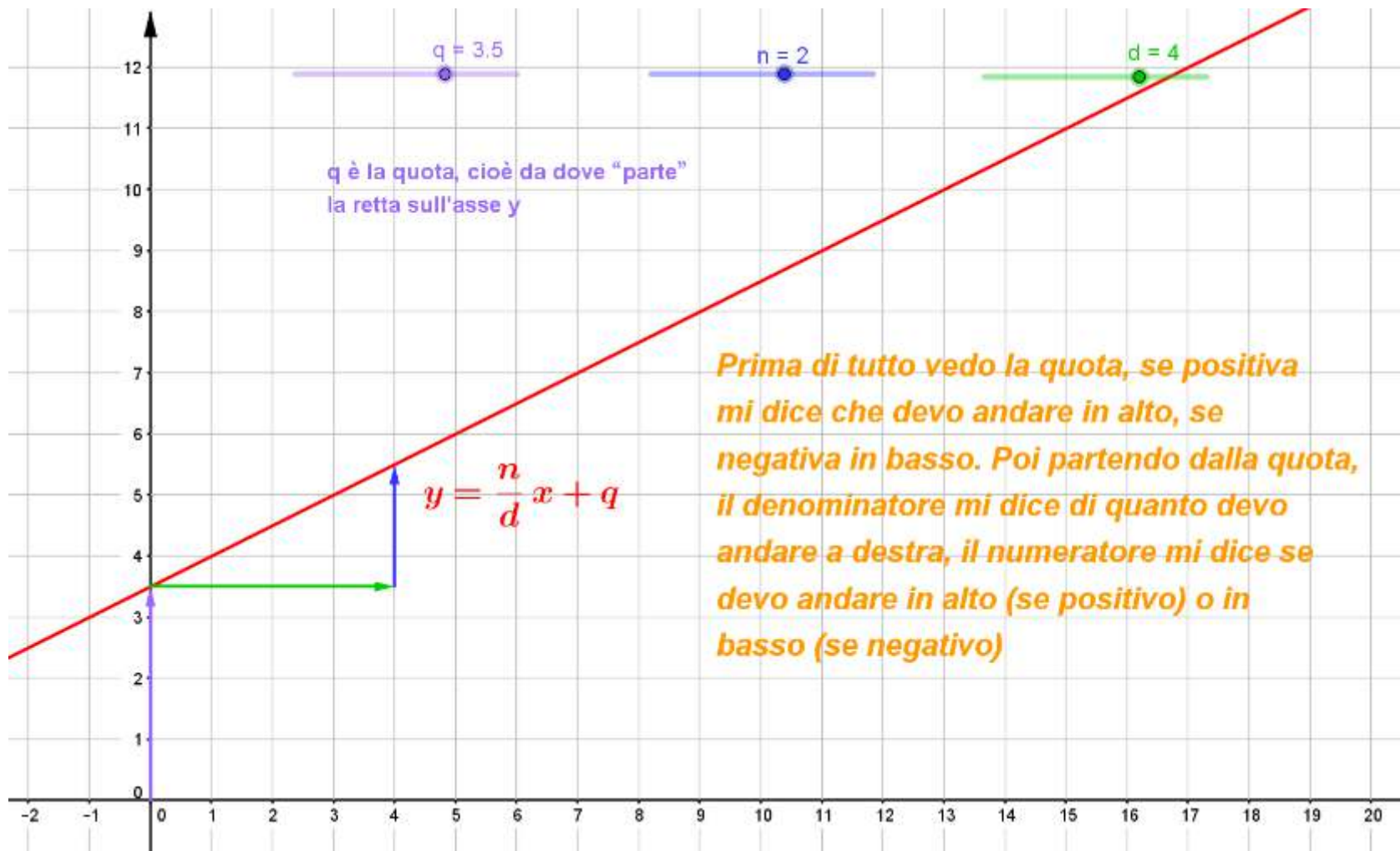
Abbiamo visto che...

Una buona rappresentazione può aiutare la comprensione di un concetto o del testo di un problema

Rappresentare una curva o una funzione

Disegnare una retta

[File Geogebra](#)



Rappresentare un'onda sinusoidale

L'importanza di un semplice numero dentro un'equazione...

File Geogebra sull'[onda sonora](#)

Nota bene

Se i ragazzi sanno rappresentare bene, credo sia più facile poi “percorrere la strada del pensiero in modo inverso”.

Occorre riconquistare il senso delle cose, dei numeri, dei grafici, della realtà.

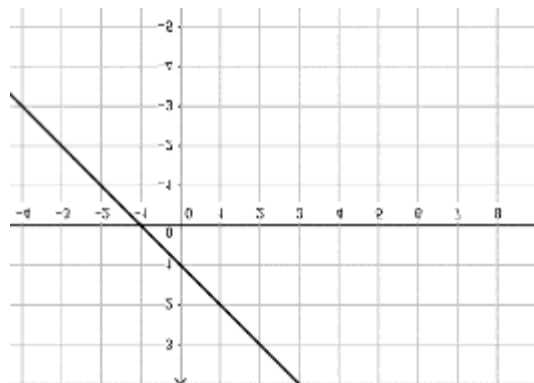
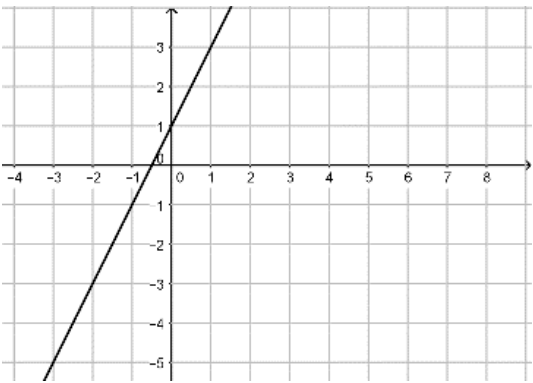
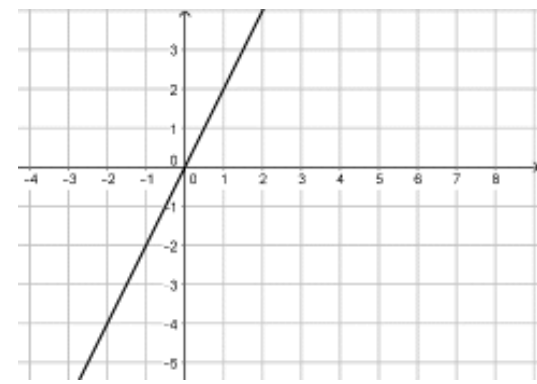
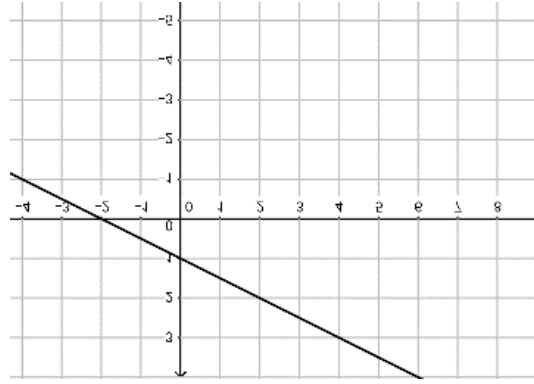
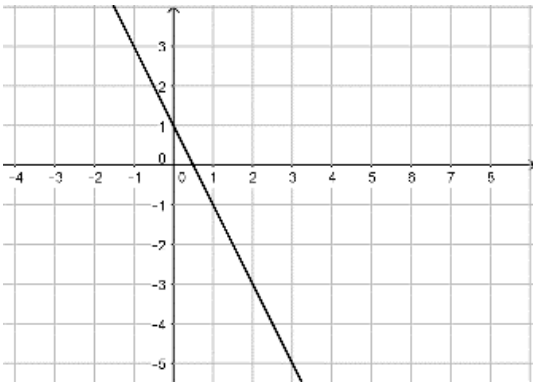
Esempi: il perché l'angolo giro è 360, il perché l'angolo si misura in senso antiorario, il perché della parola cateto, il perché della parola seno, il perché del soffitto di San Bernardino a L'Aquila.

Ora il contrario

Dal «disegno» all'equazione

In fisica

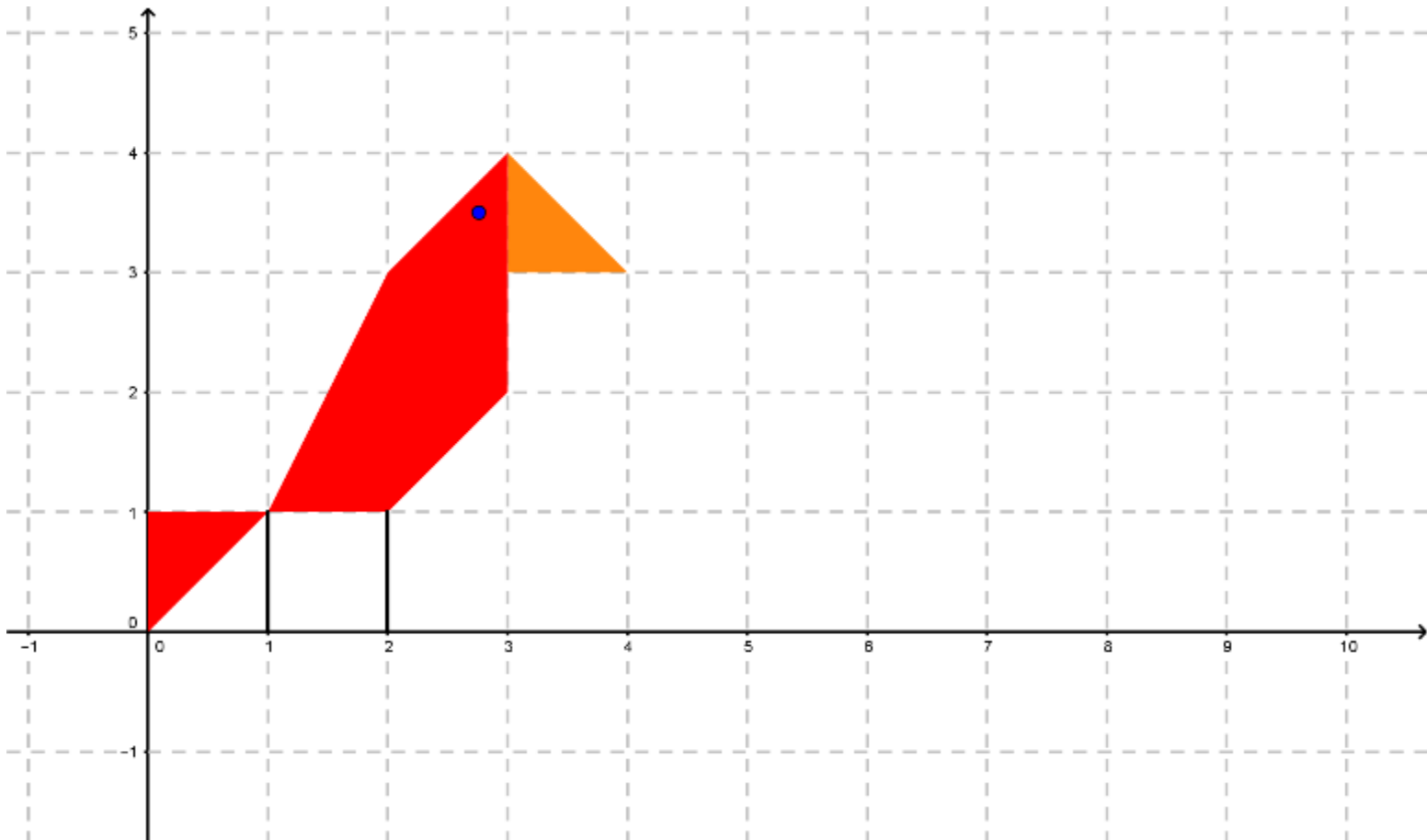
Quale dei seguenti grafici corrisponde al moto che ha equazione $s=1+2t$



Un altro esercizio:
Dato uno dei grafici precedenti determinare l'equazione del moto rettilineo uniforme ad esso corrispondente

Esercizio

Scrivi l'equazione della spezzata che delimita la figura dell'uccellino.

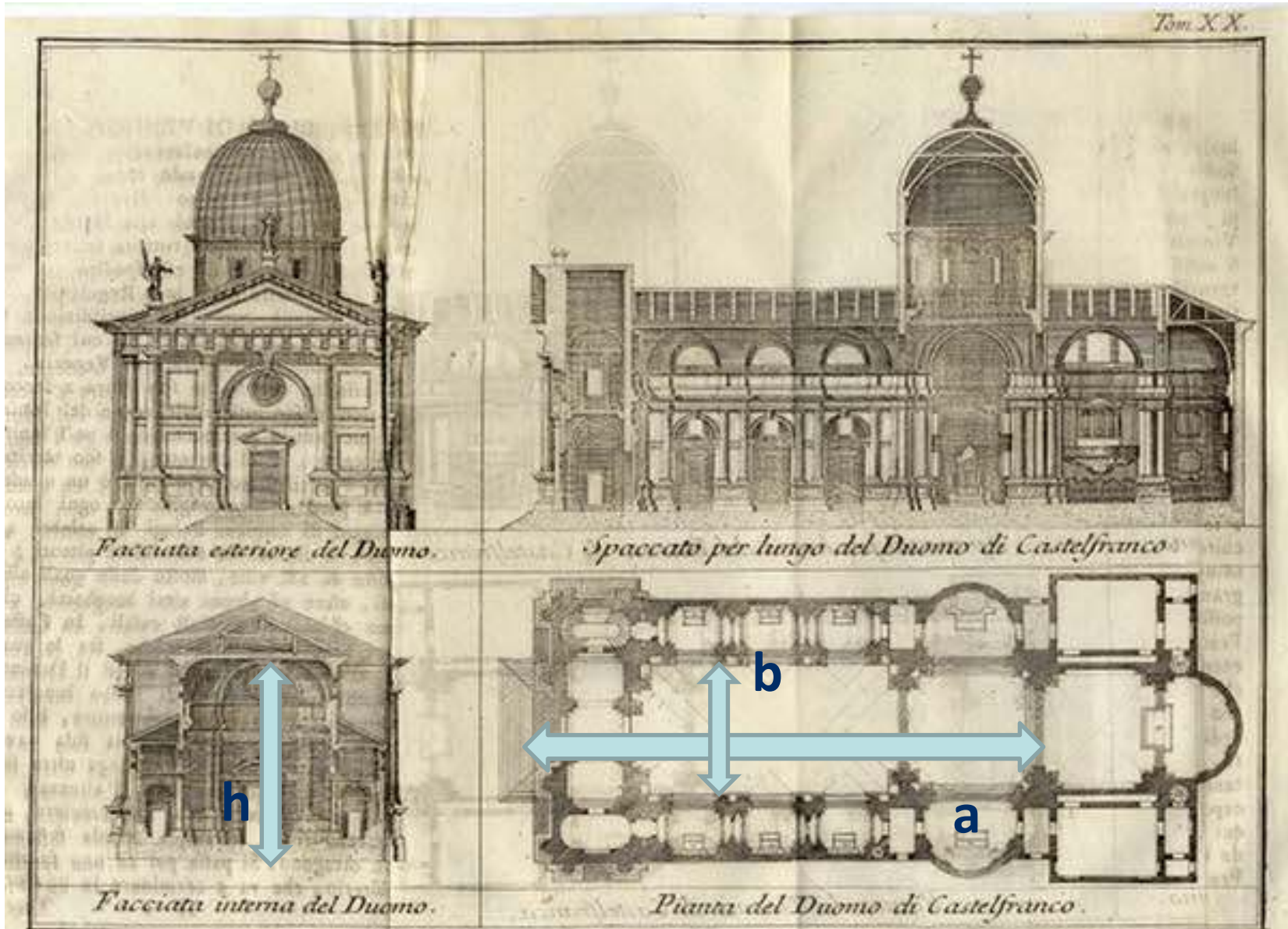


Rappresentare la realtà

Con l'aiuto della matematica

La parola ad Ermanno

Progetto del duomo (architetto F. M. Preti, XVIII secolo)



Come *rappresentare in formula* il legame tra a, b e h?

$$h = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a + b}$$

h è la media armonica di a e b, cioè la stessa relazione che lega le lunghezze di tre corde omogenee che pizzicate simultaneamente producono l'accordo consonante di do maggiore!

La relazione matematica è voluta, anzi *teorizzata!*

“...sarà l’architettura
la musica dei nostri occhi,
la quale infatti ci somministra
le forme valenti a produrre
la bellezza, e fuori di cui
non troverassi giammai.”

(F. M. Preti, 1762)



Interno del duomo

Andando in gita...

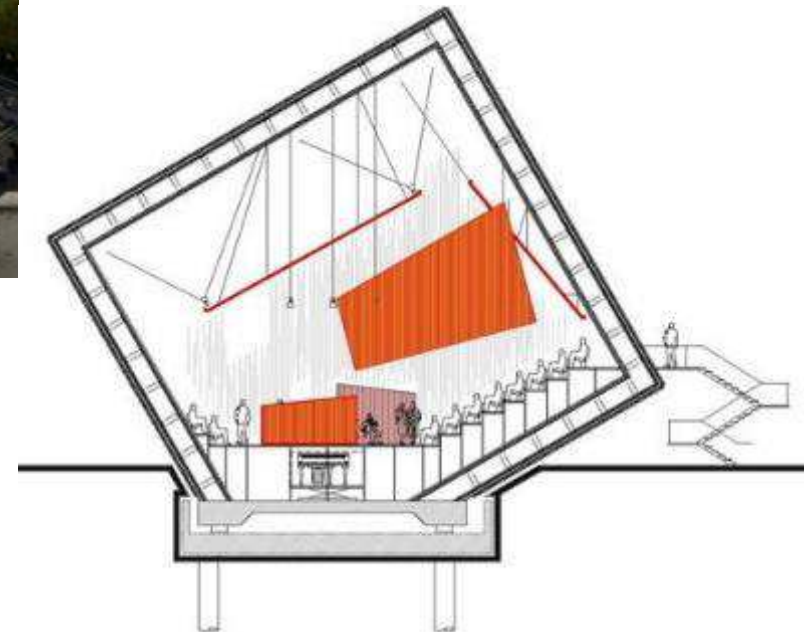
Si possono scattare delle foto e chiedersi...

Quale sarebbe l'equazione che potrebbe descrivere ciò che vedo?

Oppure dare delle schede e lavorare sul posto

Geogebra è un app che su Android funziona. (voi l'usate? Avete qualche app da consigliare?)

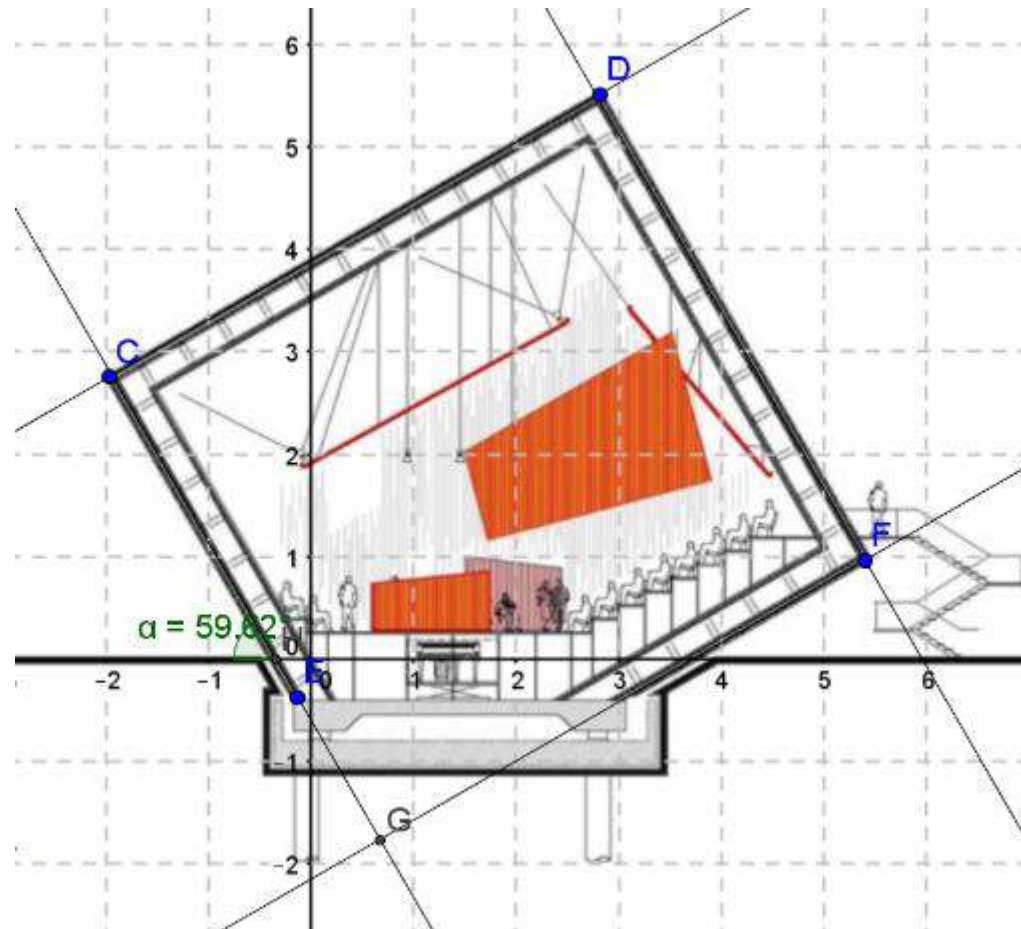
Andando in gita a L'Aquila



Per ogni immagine alcune domande

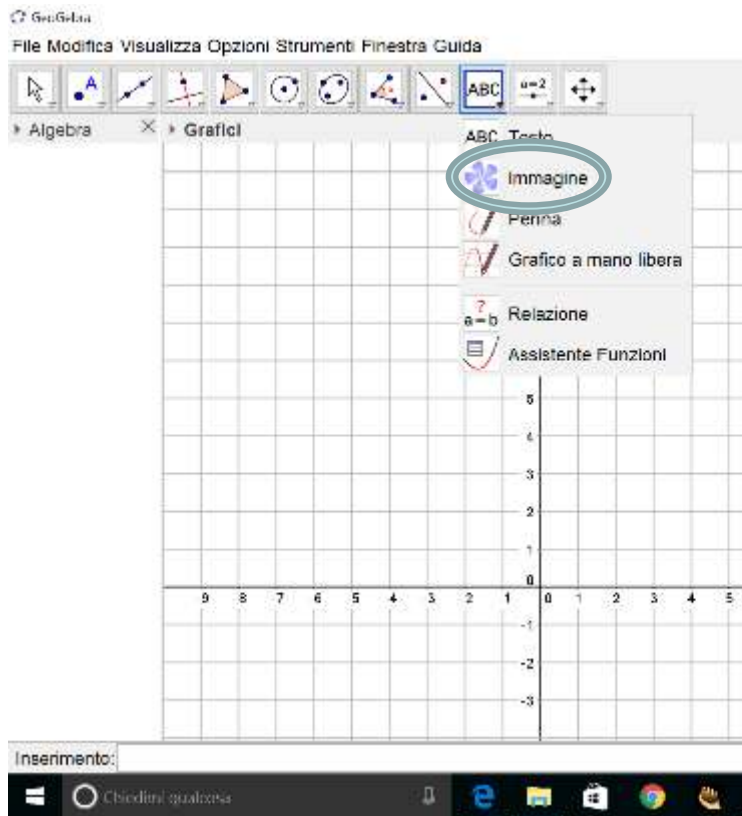
L'auditorium di Renzo Piano, ha una forma particolare. Ai nostri alunni si possono fare le seguenti domande da verificare con Geogebra:

- è un quadrato?
- Quali sono le equazioni dei suoi lati?
- Di quanto è stato ruotato?

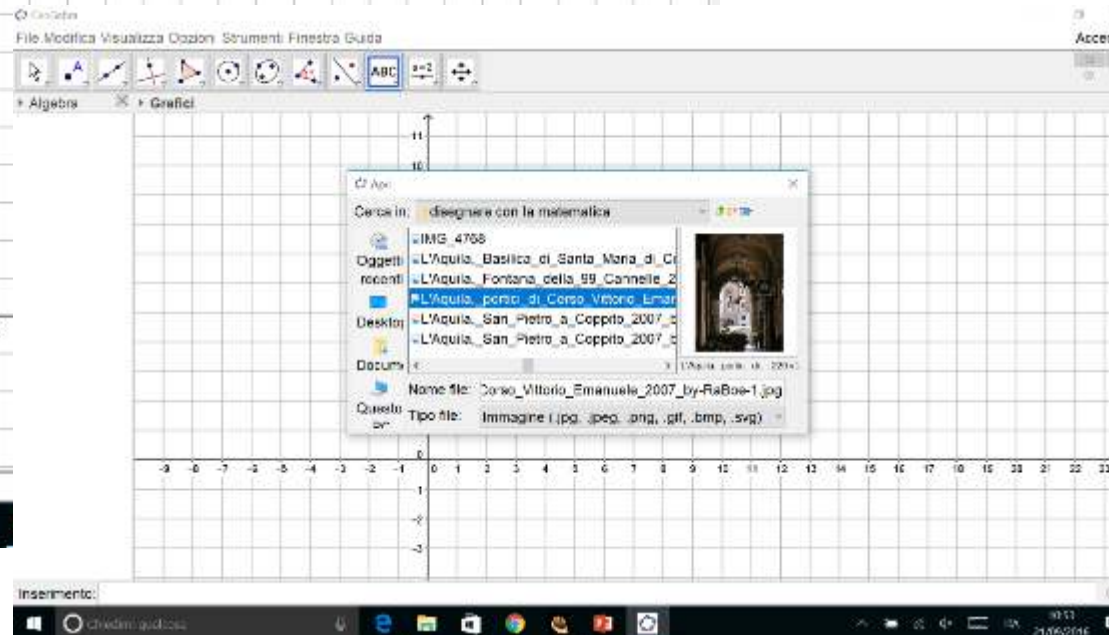


Come si fa?

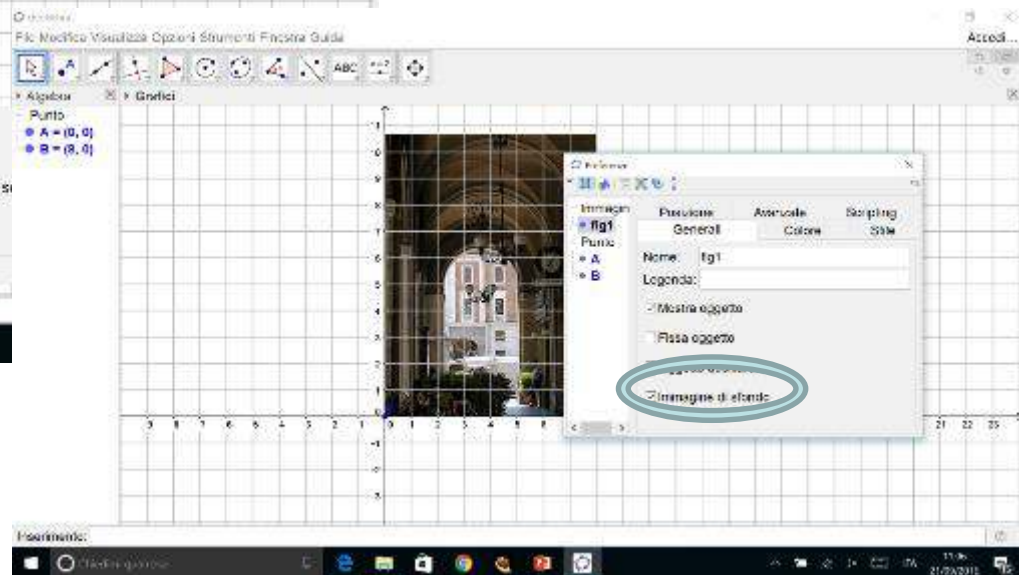
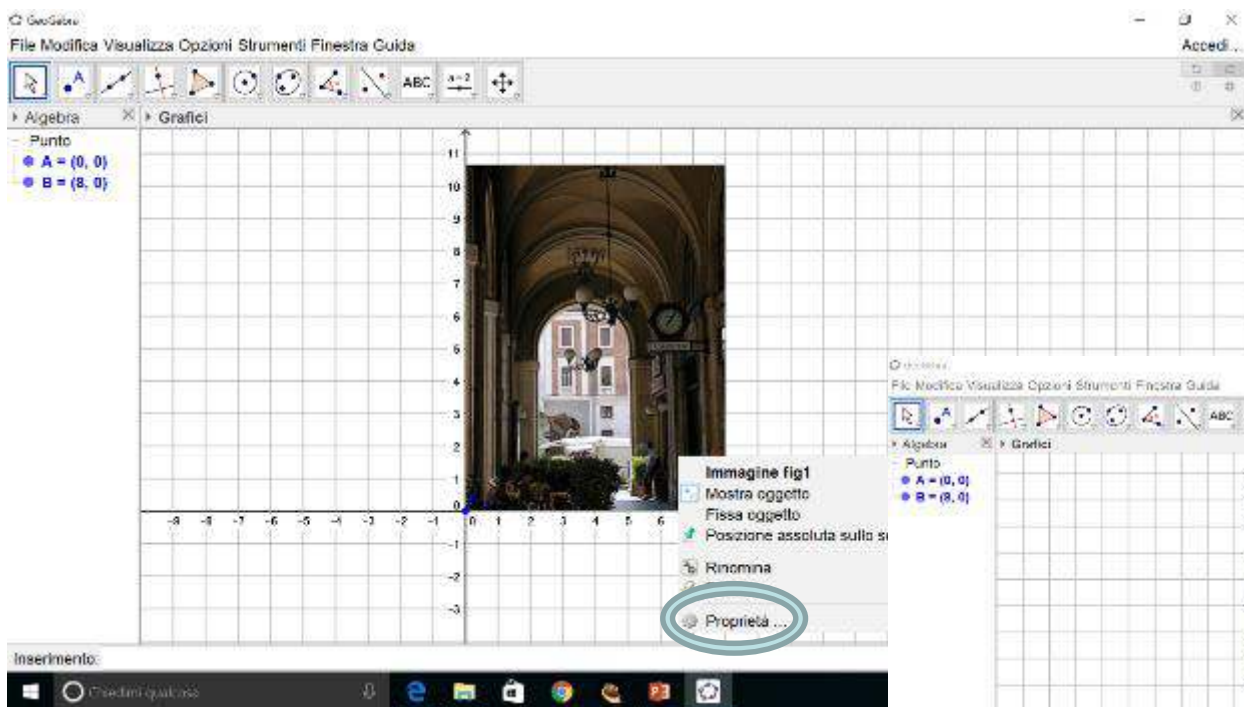
Occorre inserire prima l'immagine con Geogebra



Scegliere l'immagine da inserire



Come si fa?



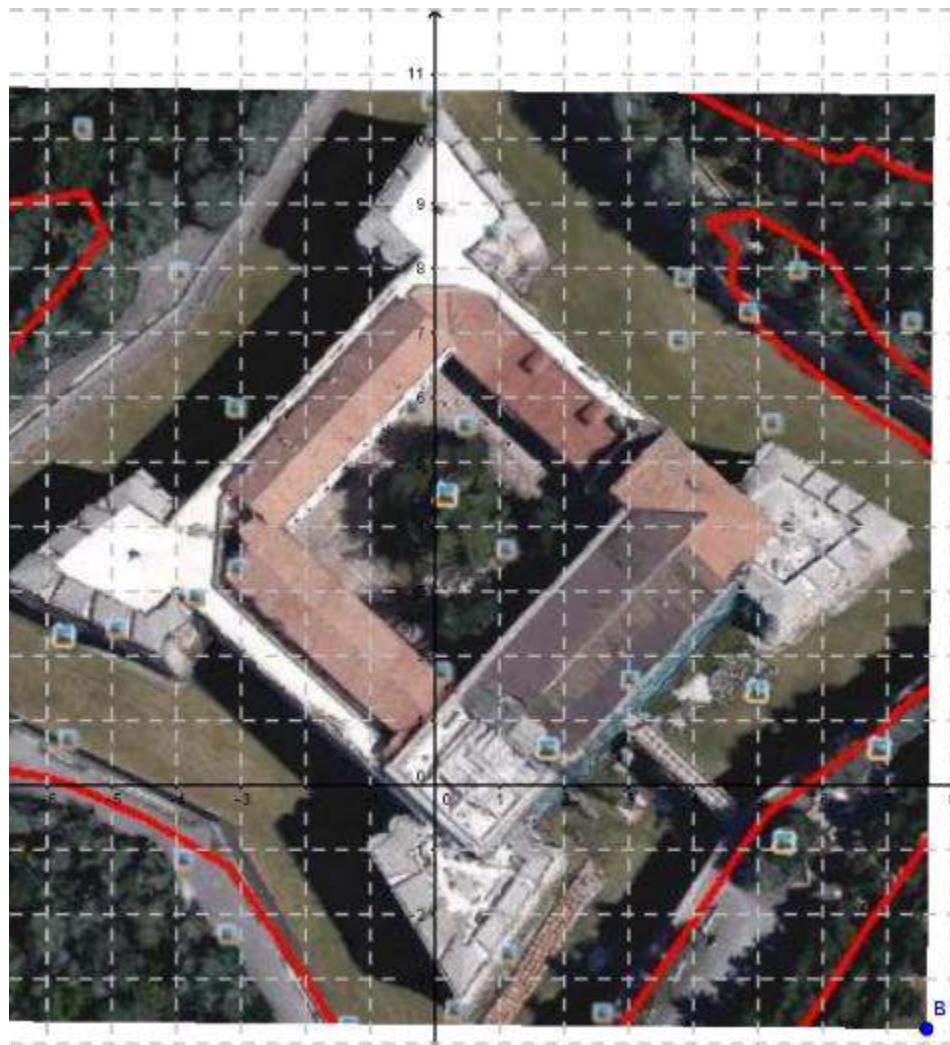
Se occorre ingrandire o rimpicciolire la foto bisogna cambiare le coordinate dei punti A e B.

Cliccare sulla foto con il tasto destro del mouse e andare su Proprietà e spuntare «immagine di sfondo»

Andando in gita a L'Aquila

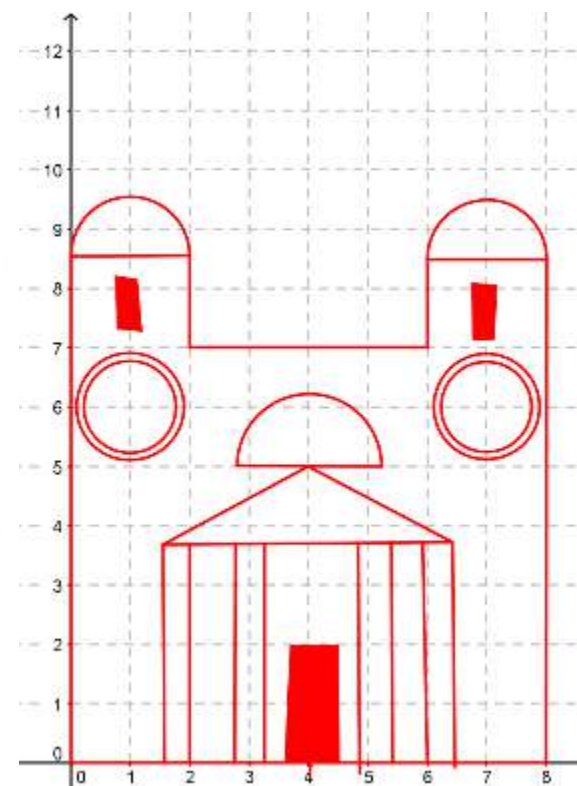
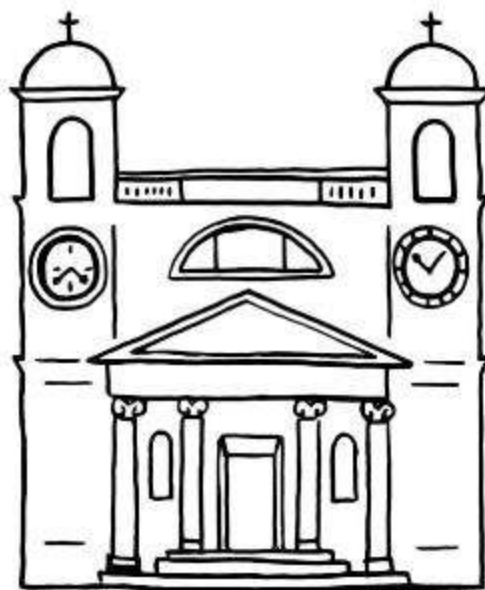


- Il castello ha una forma quadrata?
- I bastioni a forma di lance come sono orientati?
- Che angolo formano le punte?



Andando in gita a L'Aquila

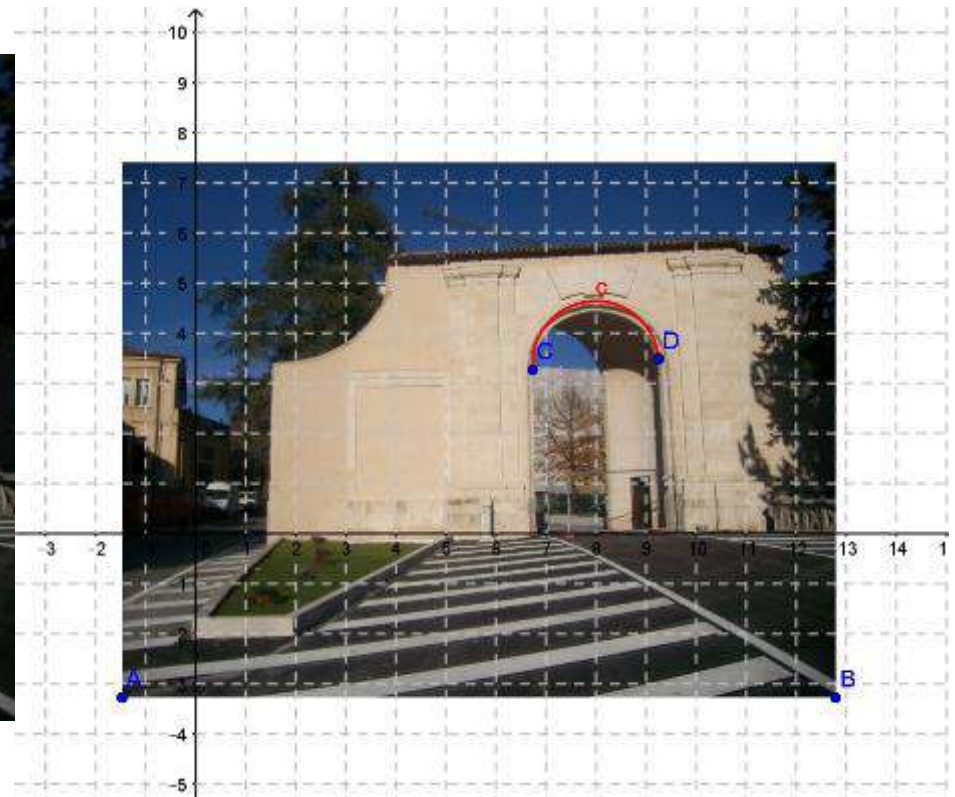
E perché non disegnare in modo stilizzato il duomo e saperne le equazioni? Potrebbe essere un lavoro di gruppo



Andando in gita a L'Aquila

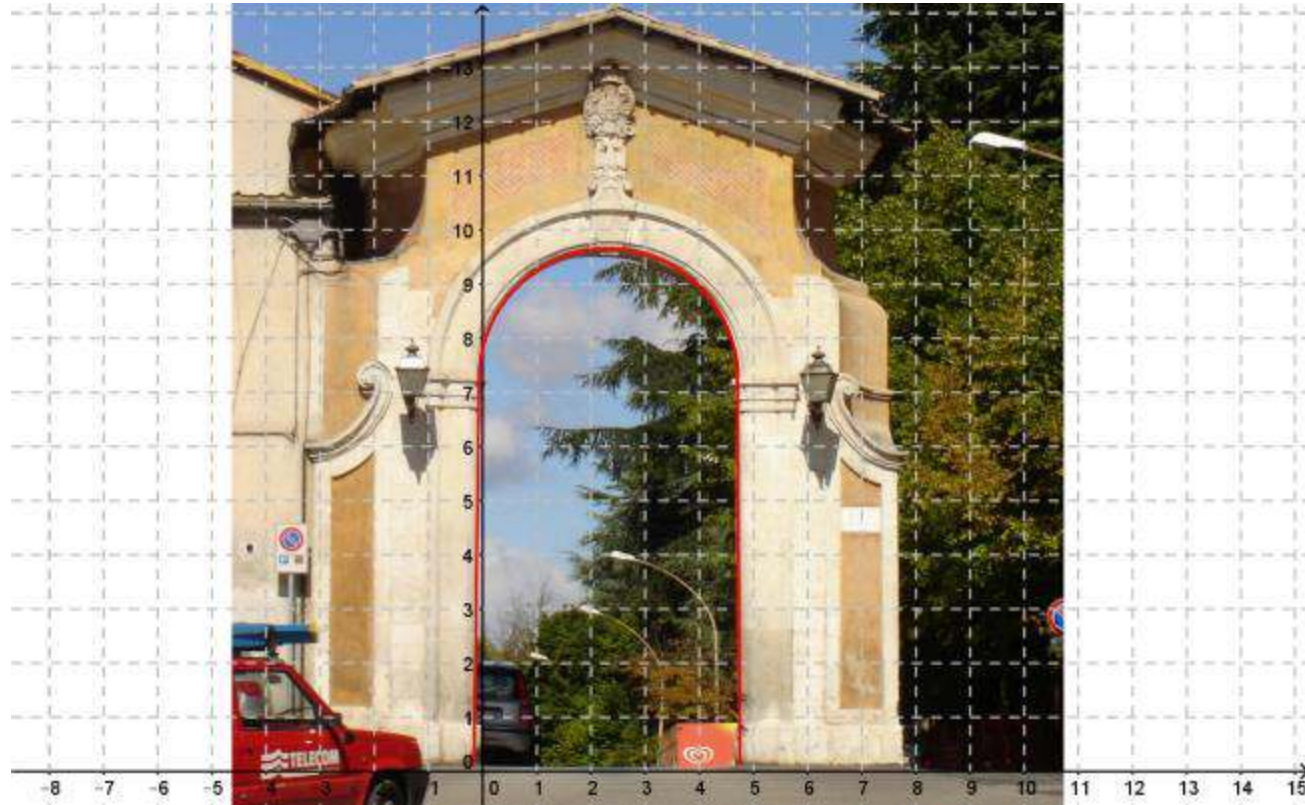
La porta, le porte...

Scrivi l'equazione della
semicirconferenza rossa



PORTA CASTELLO

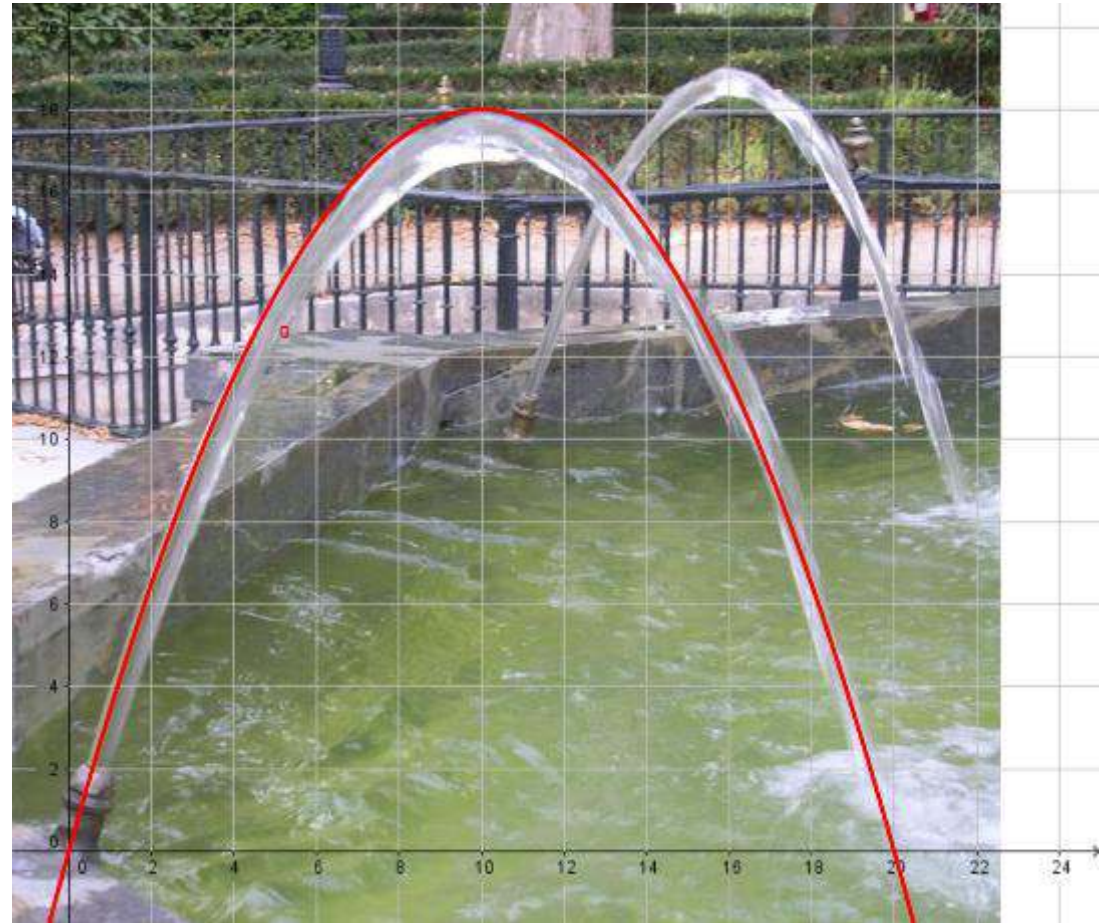
Scrivi l'equazione dell'arco rosso



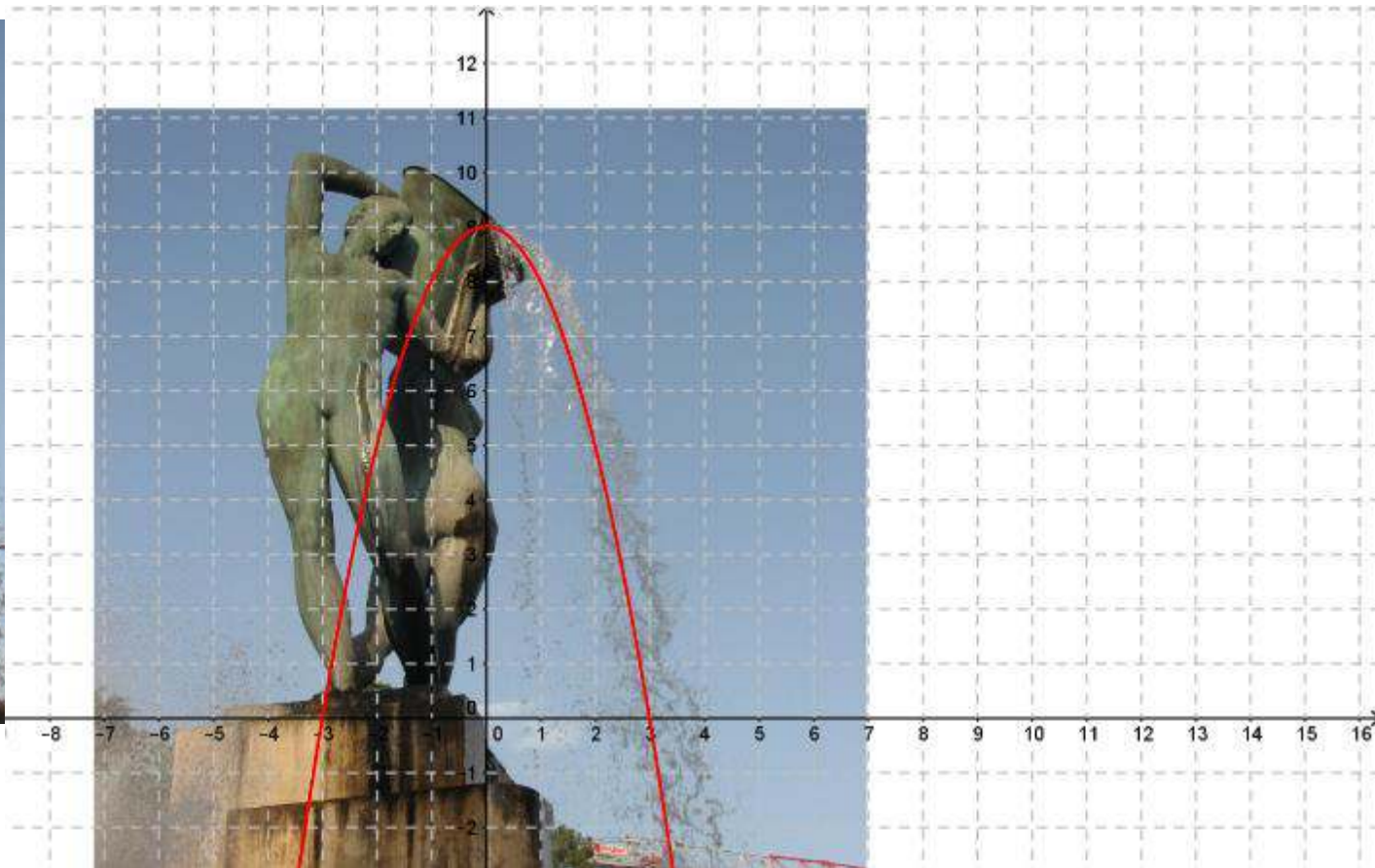
Andando in gita a L'Aquila

Le fontane...

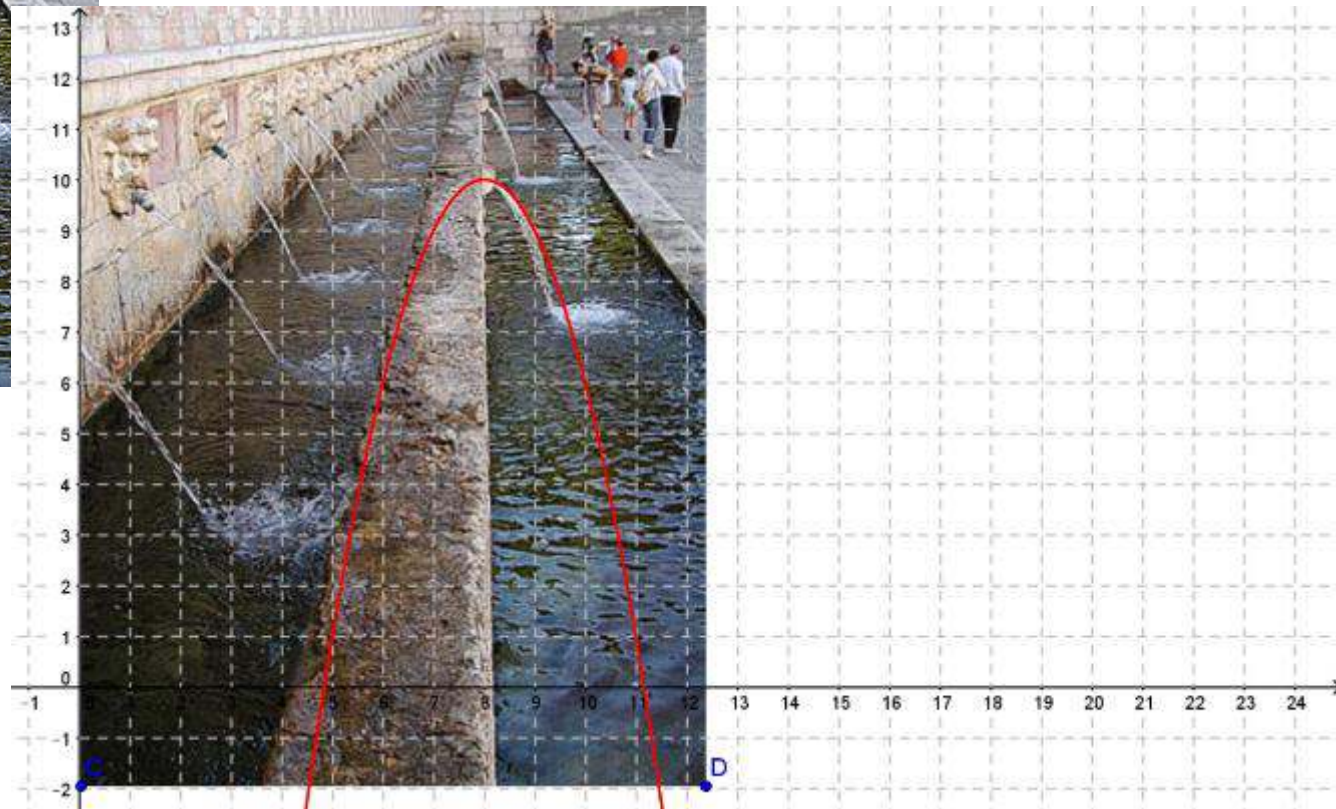
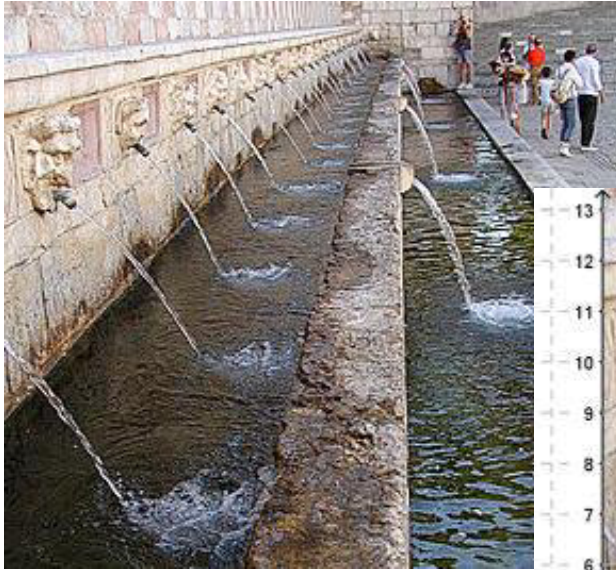
Andando in gita...



La fontana luminosa



La fontana delle 99 cannelle



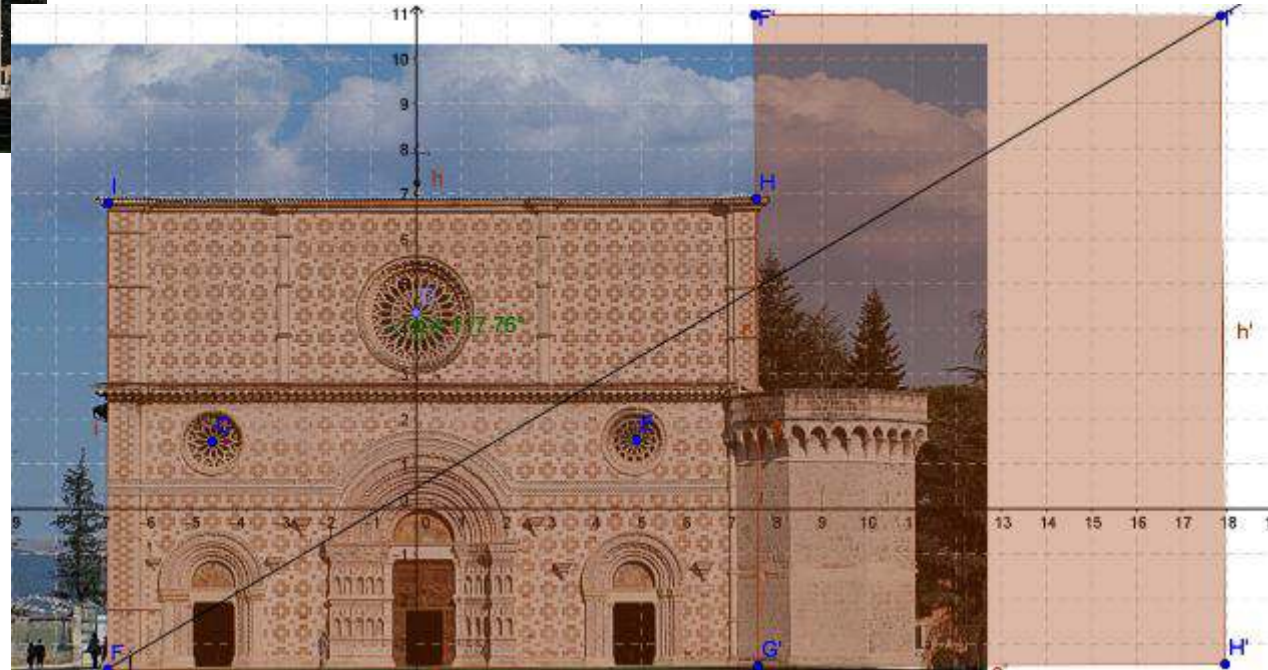
Anfiteatro di Amiternum



Andando in gita a L'Aquila



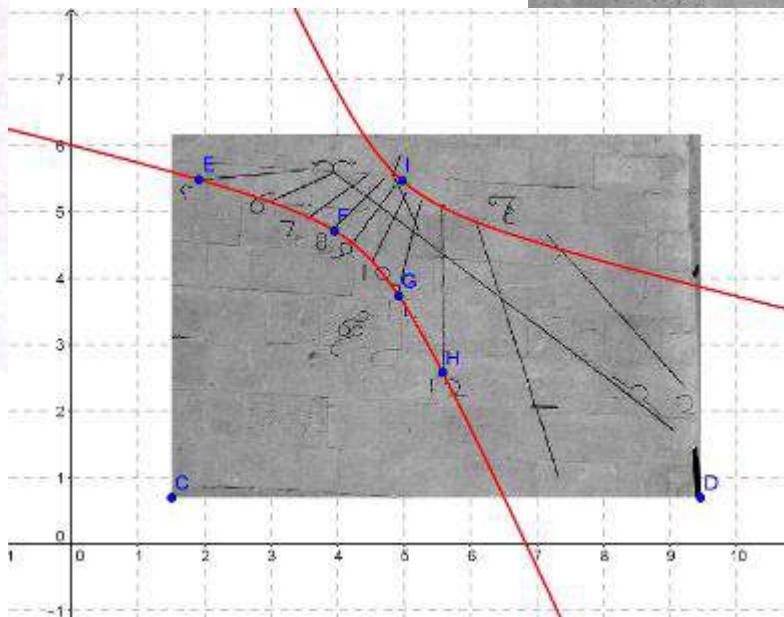
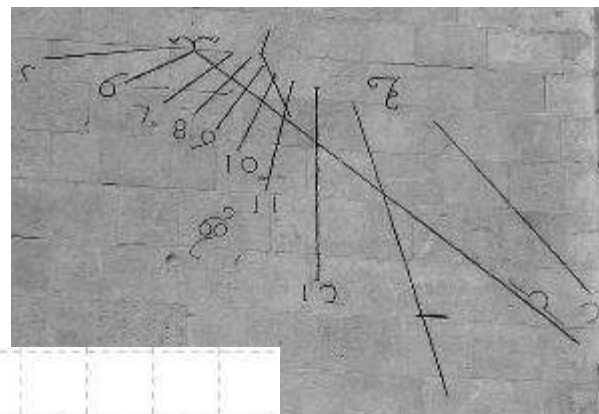
- Che angolo formano tra loro i centri dei rosoni?
- La facciata ha le dimensioni di un rettangolo aureo?



Andando in gita a L'aquila



La meridiana sulla
facciata di san Vito



nutella

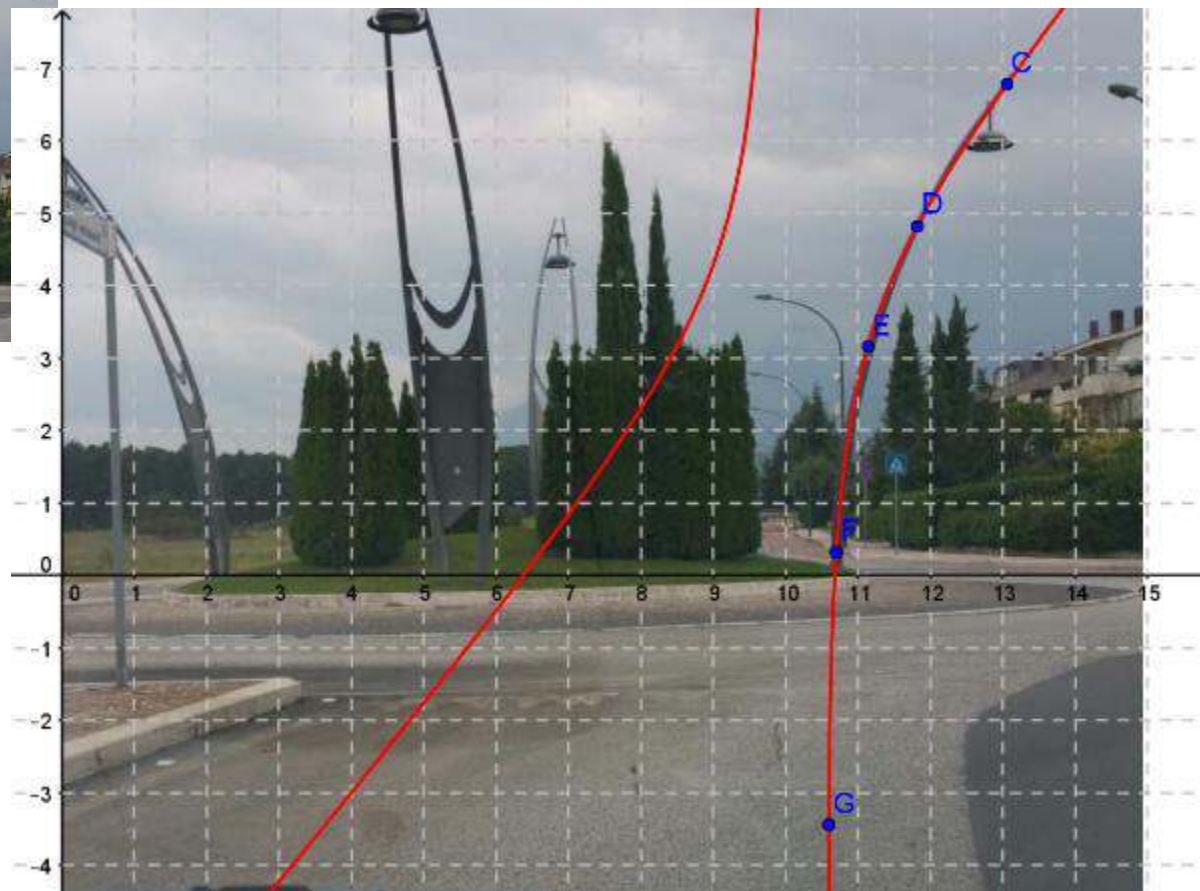
Che mondo sarebbe senza Nutella.

Cosa hanno in comune la meridiana
di san Vito e la Nutella?

Andando in giro...

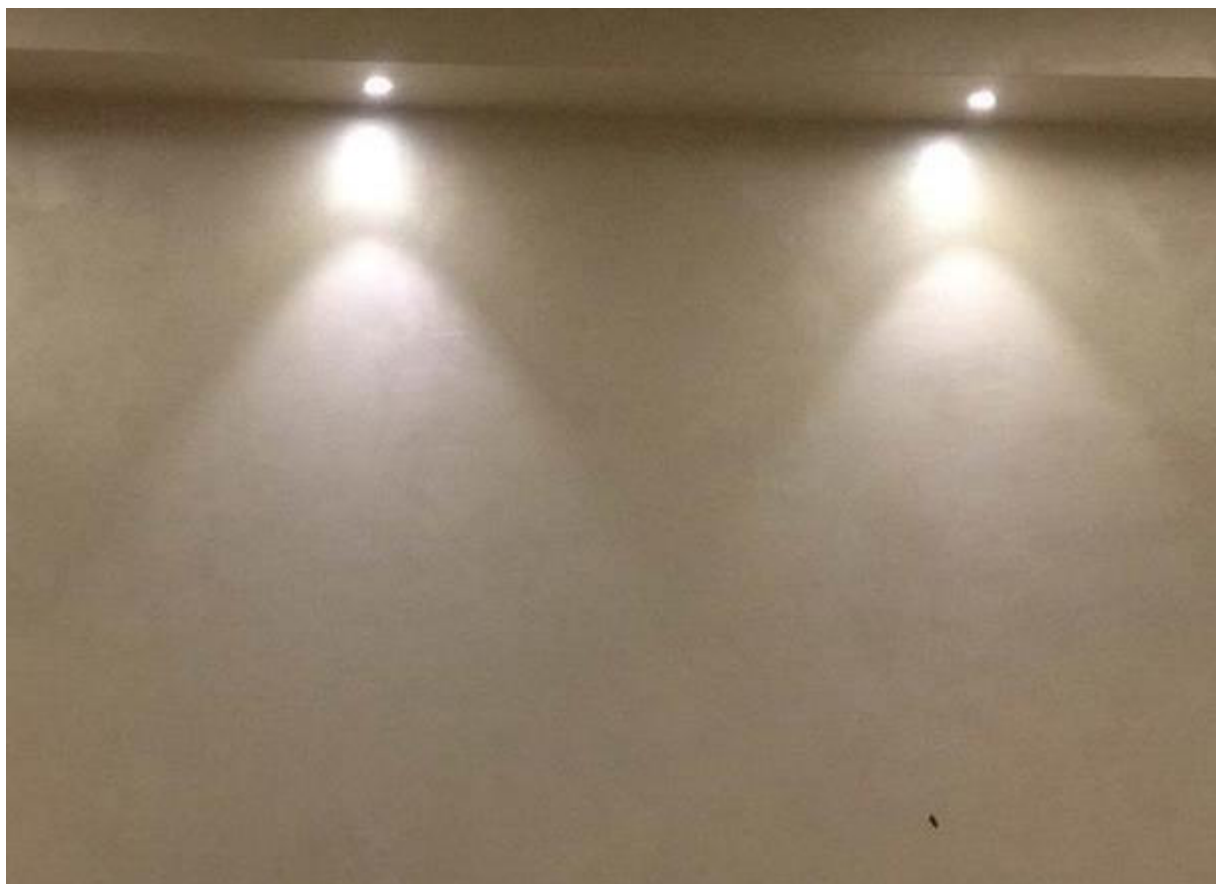


Andando in giro... ad Avezzano



Andando in gita a L'Aquila...

in pizzeria



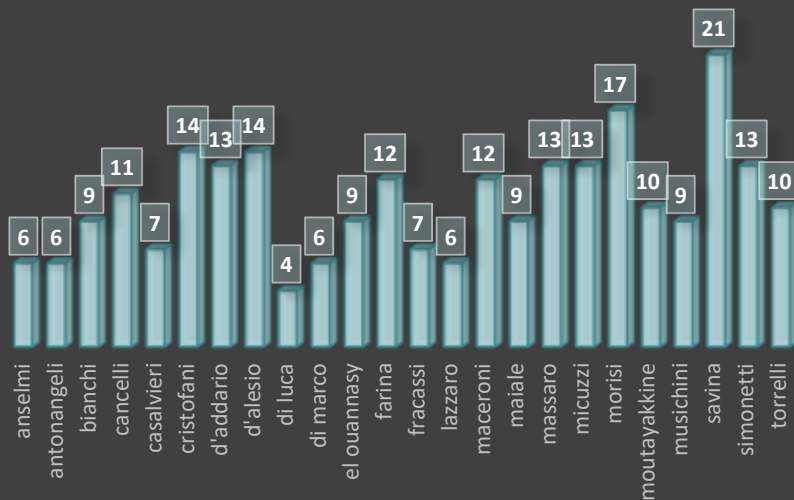
Facciamolo insieme!

Rappresentare dei dati e saperli leggere

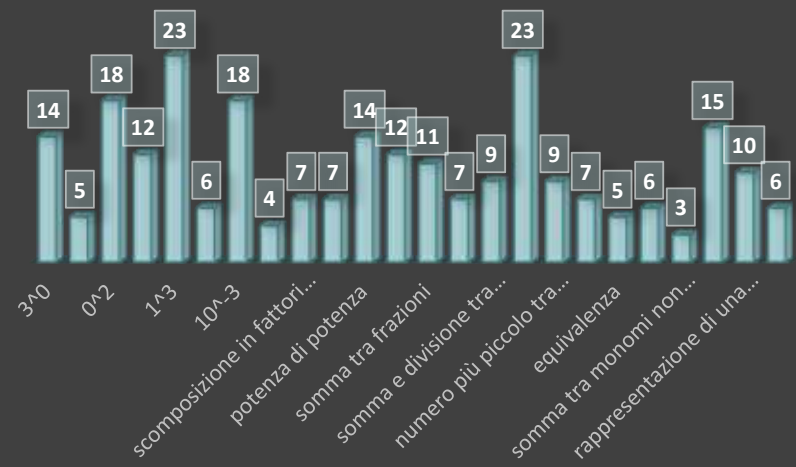
Ma quali dati?

Partiamo dai loro voti scolastici vedendo quali grafici è possibile fare. (L'anno scorso Luigi Regoliosi ci ha fatto riflettere su questo: quando i dati parlano di loro i ragazzi si coinvolgono e si scoprono)

TITOLO DEL GRAFICO



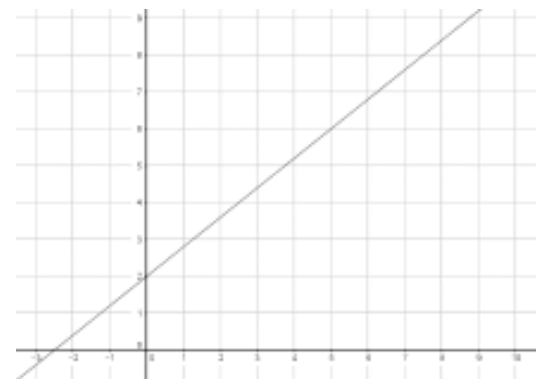
RISPOSTE ESATTE PER OGNI DOMANDA



Leggere i grafici (in fisica o matematica)

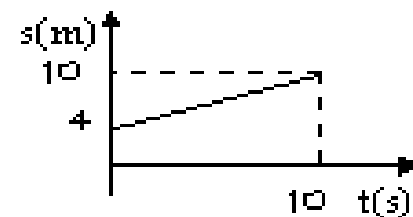
In figura è rappresentato un moto rettilineo uniforme. Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa

- Lo spazio percorso al tempo 0 è 2
- La velocità del moto è 0,8 m/s
- La velocità del moto è 1,25 m/s
- dopo 5 s lo spazio percorso è 6m



Dal grafico spazio-tempo possiamo determinare lo spazio percorso dal corpo in 10 secondi :

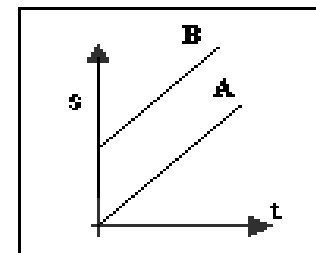
- 6 m b) 4 m c) 10 m d) non è possibile rispondere



In figura è riportato un diagramma spazio-tempo relativo al moto di due corpi.

Che cosa si può affermare?

- i due corpi si muovono con diversa velocità
- i due corpi si muovono con la stessa velocità.
- i due corpi proseguono affiancati.
- non possiamo rispondere, i dati sono insufficienti



Rappresentare con la matematica

Il testo del problema potrebbe essere il seguente:

Maria vuole preparare un bigliettino al computer con un disegno stilizzato come quello in figura (ad esempio un cuore). Ha a disposizione un programma di grafica molto semplice in cui occorre inserire le equazioni corrette degli archi delle curve che compongono il disegno. Quali sono queste equazioni?

Il disegno da fare potrebbe essere stato scelto anche dal ragazzo

Prima di cominciare

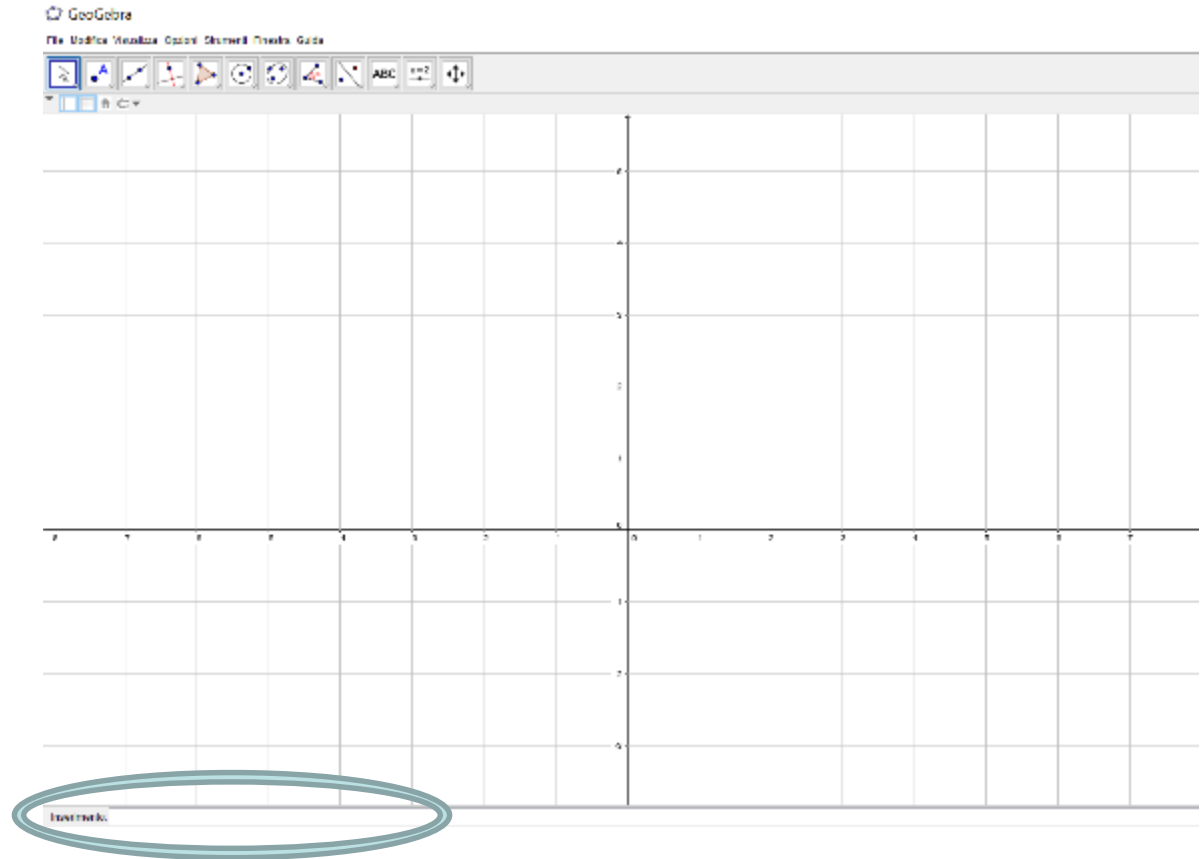
Per rappresentare il nostro cuore utilizzeremo il software gratuito Geogebra.

Occorre inserire la funzione da rappresentare all'interno della barra di inserimento.

Il comando che utilizzeremo maggiormente sarà:

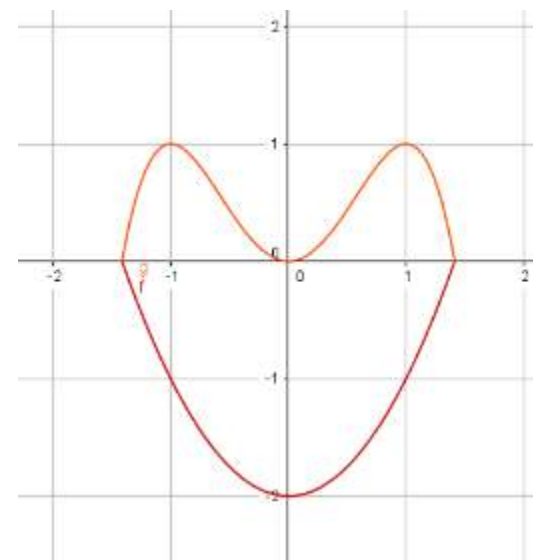
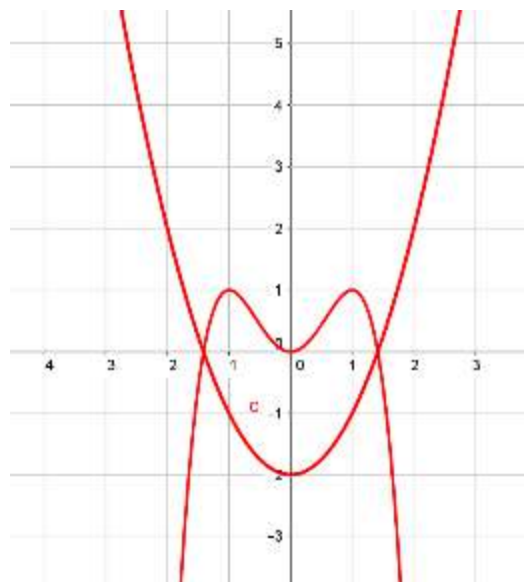
$\text{Se}[a \leq x \leq b, f(x)]$

Che servirà per limitare la funzione



Un cuore con funzioni algebriche intere

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = -x^2(x^2 - 2) \end{cases}$$



NOTA BENE: per disegnare il cuore è necessario che valga la condizione $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

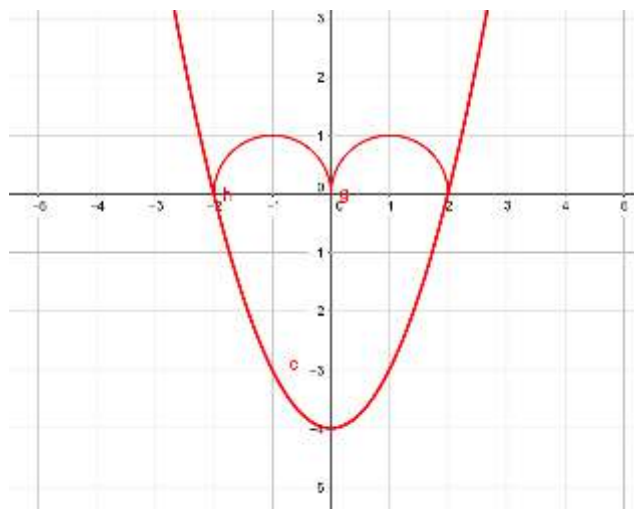
Osservazioni:

Il cuore che abbiamo costruito nei punti di intersezione tra la parabola e la quartica non è una curva arrotondata.

Proviamo a pensare a cosa vogliamo: la parte di sopra potrebbe coincidere con due semicirconferenze.

Un altro cuore con funzioni irrazionali

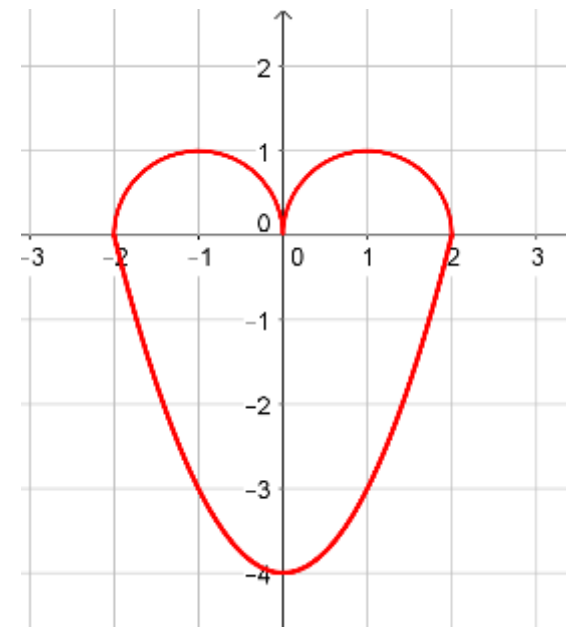
$$f(x) = x^2 - 4$$
$$g(x) = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$$
$$h(x) = \sqrt{1 - (x + 1)^2}$$



Invece di avere 3 funzioni le ultime due posso
Raggrupparle mettendo il modulo

$$g(x) = \sqrt{1 - (|x| - 1)^2}$$

Ora limito la parabola nell'intervallo $[-2, 2]$

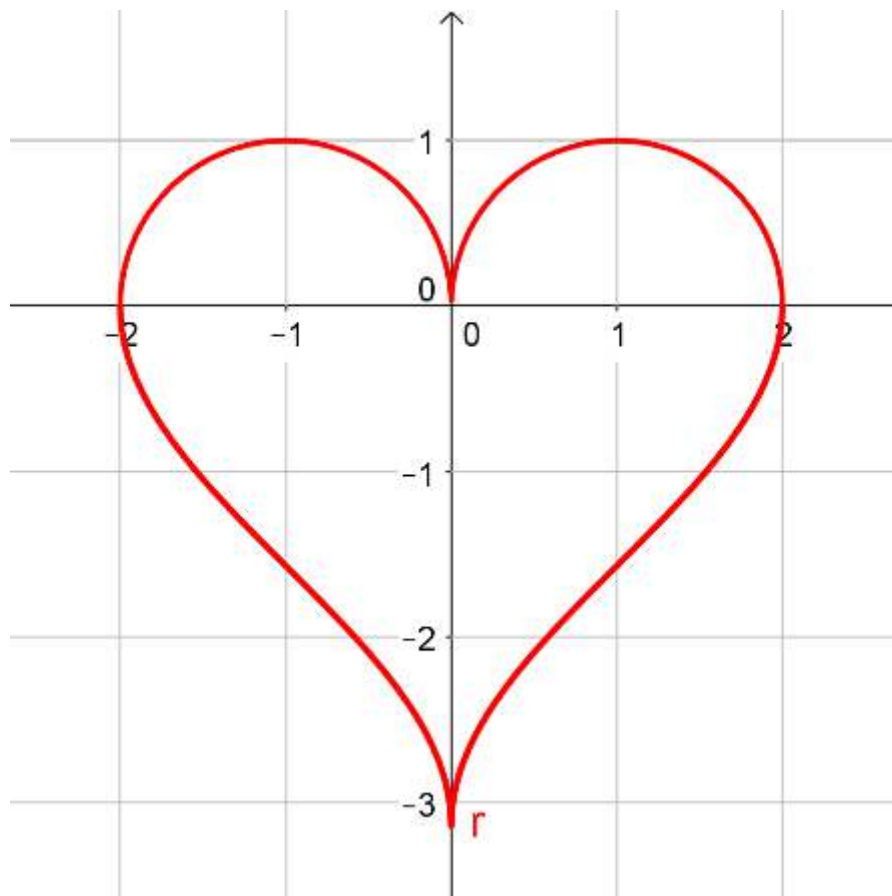


Un cuore con funzioni trascendenti

$$y = \sqrt{1 - (|x| - 1)^2}$$

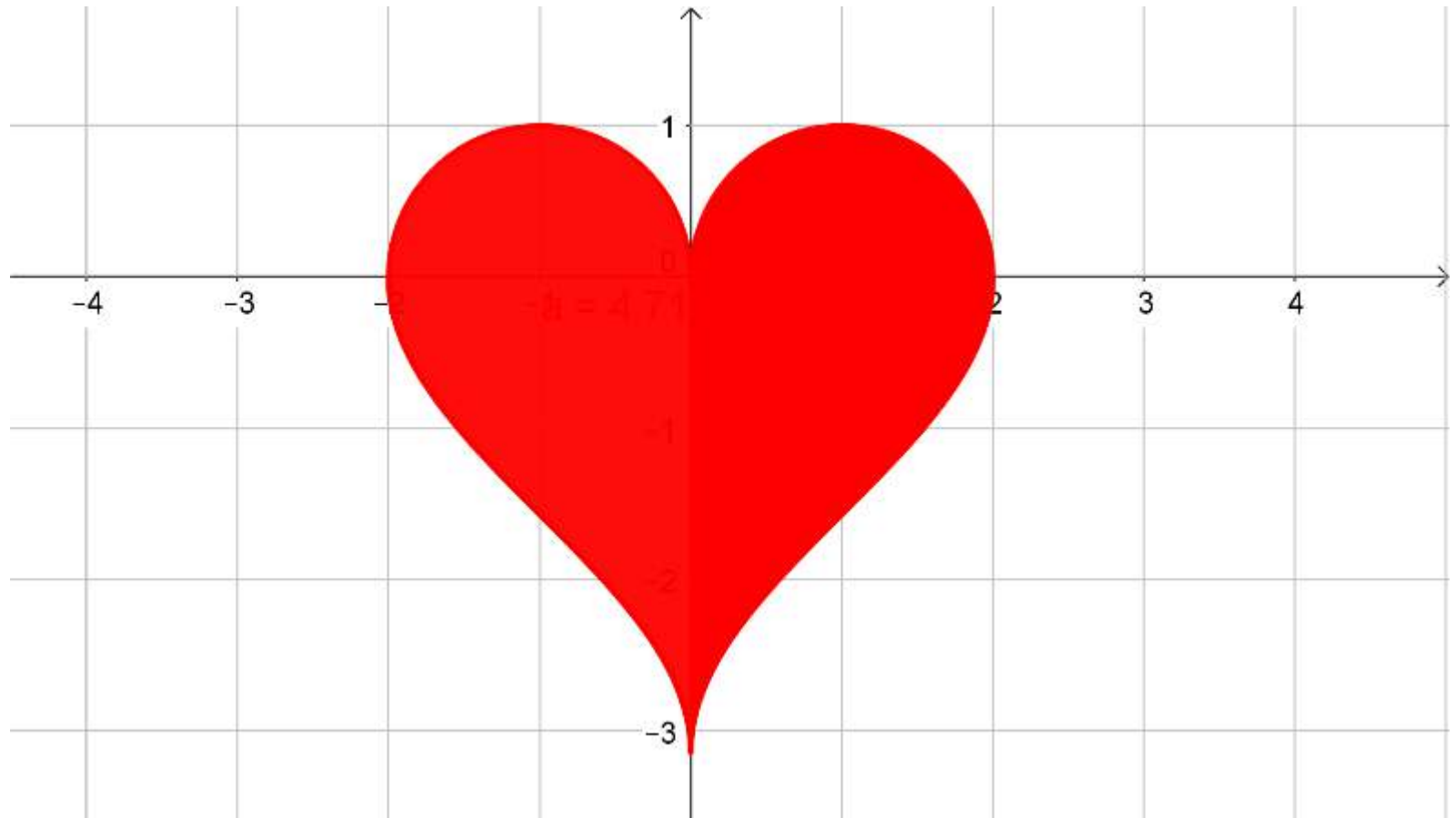
$$y = \arccos(x + 1) - \pi$$

$$y = \arccos(-x + 1) - \pi$$



E adesso coloriamo

Con la funzione integrale $Tra[f,g,a,b]$



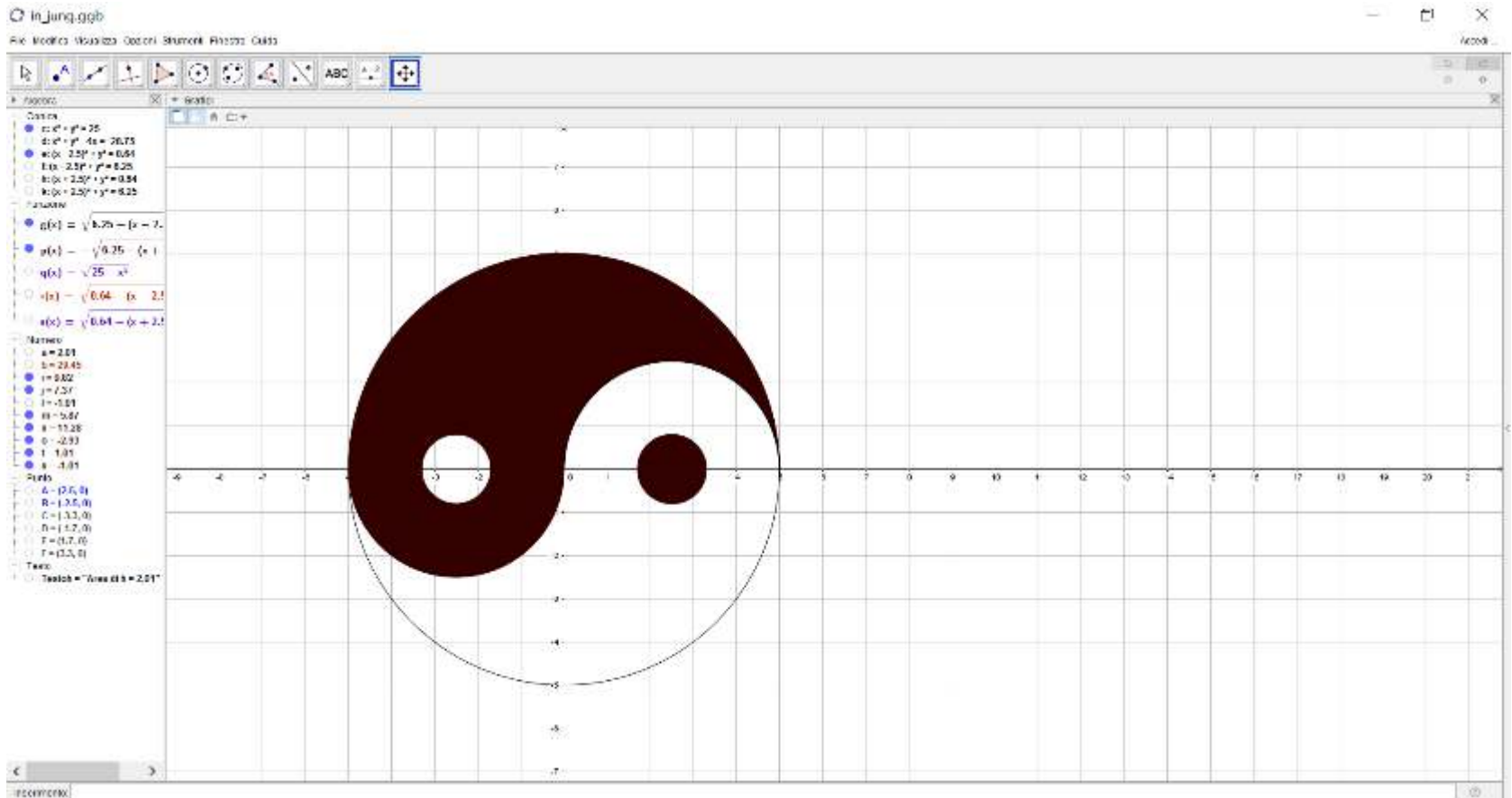
Un altro progetto dopo le conferenze



Disegna il simbolo di **ying-yang**

Quali sono le sue equazioni?

Sono tutte circonferenze!

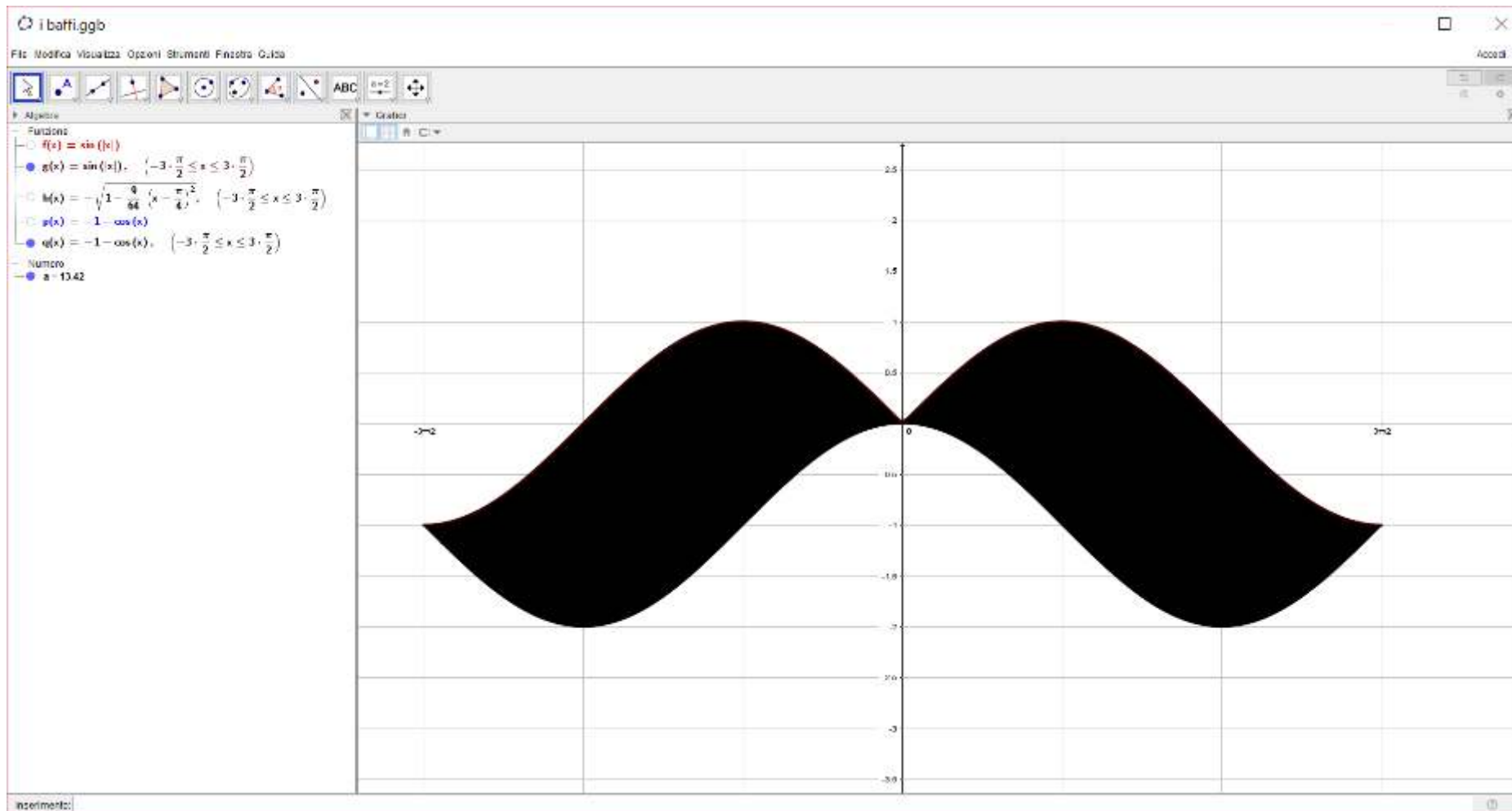


Un altro progetto: solo con sinusoidi e cosinusoidi

Disegna dei baffi:



Quali sono le sue equazioni?



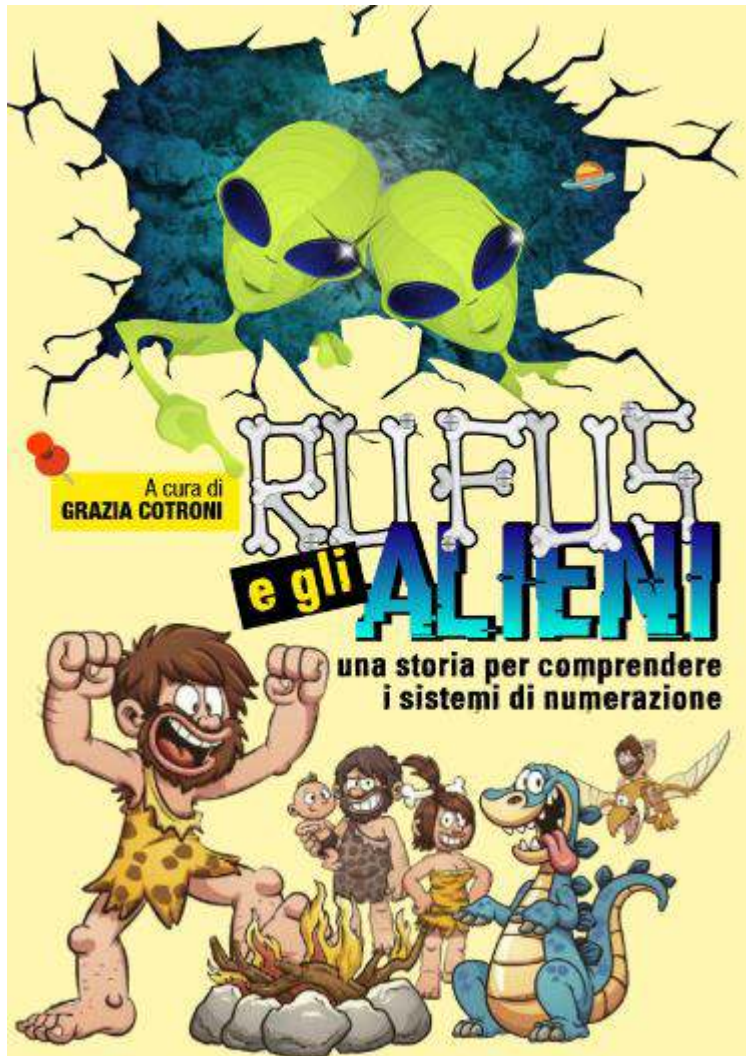
La matematica e la Pixar

- https://www.youtube.com/watch?v=gXYvDYsh_CQ
- <https://www.youtube.com/watch?v=IZMVMf4NQ0>
- <http://www.ams.org/mathimagery/thumbnails.php?album=40>

Rappresentare la matematica con l'uncinetto

<http://www.msn.com/it-it/notizie/italia/la-matematica-noi-la-insegniamo-con-luncinetto/ar-BBx0XTI?li=AAaxHVJ&ocid=spartandhp>

«Rappresentare» un argomento con una storia



Una storia per comprendere i
sistemi di numerazione

Lavori da far svolgere ai ragazzi

- Crea un disegno in cui compaiono i seguenti tipi di funzioni (semicirconferenze, rette, parabole,...) e poi una volta disegnato, cerca le sue equazioni in modo da saper descrivere e illustrare matematicamente il disegno.
- Vai in giro per la tua città, fai delle foto e studia alcuni particolari con Geogebra e crea il tuo mazzo di carte del gioco “sguardo matematico in città”.
- Fotografa i quaderni dei tuoi alunni, sfidali con gare di bellezza con determinati problemi e poi inviaci i risultati ottenuti in un anno
- Inventi una storia per illustrare un argomento di matematica